QUELQUES CONSÉQUENCES SURPRENANTES DE LA COHOMOLOGIE DE $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Don Zagier

Je vais parler de beaucoup de choses différentes. J'avais l'intention de faire un petit plan, une sorte de "Leitfaden", et j'ai commencé, mais il est devenu bidimensionnel, puis tridimensionnel et puis quadridimensionnel, et j'ai abandonné. Il faudra que vous vous rendiez compte vous-mêmes de quoi je parle au cours de mon exposé. Il est assez peu probable que vous y reussissiez complètement, car il va apparaître des thèmes assez variés et les liens entre eux ne seront sans doute pas toujours très clairs. Mais il y a une chose qui va apparaître tout le temps et que vous allez reconnaître à chaque reprise : des formules dans lesquelles il y a un X quelque part, un $X+1$, et un $1+1/X$, liés par une relation du type

$$F\big(X\big) \;\approx\; F\big(1+X\big) \,+\, F\big(1+1/X\big) \tag{*}$$

où "$\approx$" signifie qu'il peut y avoir des coefficients ou un terme additif supplémentaire. Cela constitue plus ou moins le contenu de mon exposé.

On m'a dit que je n'aurais pas dû mettre dans mon titre les mots "cohomologie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$" car ça fait peur aux gens. C'est pourtant de ça qu'il s'agit en fait, comme j'essayerai de l'expliquer plus tard. En tout cas je vous demande, même si vous ne comprenez ou n'appréciez pas grande-chose de ce que je raconte : si jamais au cours de vos études mathématiques vous découvrez dans la nature (bien sûr dans la nature mathématique, c'est la seule qui soit vraie) quoi que ce soit où il y a un X, un $X+1$ et un $1+1/X$, vous m'envoyez un petit courrier électronique, et j'essayerai de le faire rentrer dans le schéma général.

Avant de parler d'une théorie générale, je vais commencer par trois exemples assez différents.

Premier exemple : Valeurs de $\zeta(2n)$

En 1734, Euler a démontré un théorème très célèbre, et en même temps a résolu un problème qui même à l'époque datait de plus de 50 ans, le "problème de Bâle," quand il réussit à évaluer les nombres que l'on note maintenant

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \text{etc...}$$

($\zeta(s)$ = fonction zêta "de Riemann" ou plutôt d'Euler). Il montra que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \text{etc...}$$

Je voudrais commencer par démontrer ça, mais je suis beaucoup moins fort qu'Euler, et je vais donc remplacer le nombre π par le nombre P *défini* comme

$$P := \sqrt{6\zeta(2)}$$

ce qui rend le premier théorème plus ou moins trivial, puisque j'ai déjà l'identité

$$\zeta(2) = \frac{P^2}{6}$$

où P pourrait par exemple être égal à π. Mais maintenant je vais démontrer que

$$\zeta(4) = \frac{P^4}{90}\,,$$

c'est-à-dire que je vais montrer une relation entre les deux nombres $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$, sans avoir déterminé en fait ni l'un ni l'autre.

Ça se fait de la manière suivante. Je considère la fonction rationnelle de deux variables, homogène de degré -4, définie par

$$f(m,n) = \frac{2}{mn^3} + \frac{1}{m^2n^2} + \frac{2}{m^3n}\,. \tag{1}$$

Il ne faut pas me demander pourquoi cette fonction-là. J'ai choisi les coefficients de telle manière que ce que je dirai après soit juste. On constate que

$$f(m,n) - f(m,n+m) - f(m+n,n) = \frac{2}{m^2n^2} \tag{2}$$

ce qui est un exercice d'école, et vous voyez que quelque chose de non trivial s'est déjà passé : le membre de gauche appartient a priori à $\mathbb{Z}[m^{-1},\, n^{-1},\, (m+n)^{-1}]$, et il s'est produit un petit miracle pour que les pôles en $m=-n$ s'en aillent et qu'on ait un polynôme en $1/m$ et $1/n$ seulement. C'est bien sûr là la raison pour le choix des coefficients dans (1).

Je considère maintenant la sommation de (2) sur tous les entiers m et n positifs (au sens anglais du mot, c'est-à-dire strictement positifs), et je vois qu'à droite on a $2\,\zeta(2)^2$ puisqu'on a deux sommations indépendantes sur m et sur n. A gauche par contre on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{m,n>0} f(m,n) - \sum_{m,n>0} f(m,m+n) - \sum_{m,n>0} f(m+n,n)&\\ = \sum_{m,n>0} f(m,n) - \sum_{n>m>0} f(m,n) - \sum_{m>n>0} f(m,n)&\end{aligned}$$

(en remplaçant $m+n$ par n dans la deuxième et par m dans la troisième somme respectivement), et puisqu'on a pour n'importe quels deux entiers m et n, soit $n>m$, soit $m>n$, soit $m=n$, on trouve pour le membre de gauche

$$\sum_{n>0} f(n,n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^4} \;=\; 5\,\zeta(4)$$

ce que donne bien la relation $5\,\zeta(4) = 2\,\zeta(2)^2$ qu'on voulait démontrer.

De la même manière, si je choisis un nombre pair $k = 4, 6, 8, \ldots$ et que je définis un autre f, homogène de degré $-k$, par

$$f(m,n) = \frac{2}{mn^{k-1}} + \frac{1}{m^2n^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{m^{k-2}n^2} + \frac{2}{m^{k-1}n}\,, \tag{3}$$

alors, avec un calcul presque aussi élémentaire que dans l'équation (2) on constate que la même différence se simplifie et qu'on a

$$f(m,n) - f(m,m+n) - f(m+n,n) = 2 \sum_{\substack{0<j<k \\ j \text{ pair}}} \frac{1}{m^j n^{k-j}}\,.$$

(Dans le cas précédent j ne prenait que la seule valeur 2.) Le même raisonnement qu'avant donne cette fois

$$(k+1)\,\zeta(k) \;=\; \sum_{n>0} f(n,n) \;=\; 2 \sum_{\substack{0<j<k \\ j \text{ pair}}} \zeta(j)\,\zeta(k-j) \qquad (k \ge 4 \text{ pair})\,,$$

et ceci montre par récurrence que $\zeta(k) \in \mathbb{Q}P^k$ pour tout k pair.

Voilà donc une preuve du théorème d'Euler, et en même temps une première application de l'idée indiquée de façon schématique par l'équation (*). Bon, vous allez protester que j'avais parlé de X, $X+1$ et $1+1/X$ et qu'il n'y en a pas ici. Mais la fonction f étant homogène, on peut sans perdre grande-chose la remplacer par la fonction d'une seule variable définie par

$$F(X) = f(X,1) = \frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X^3}\,. \tag{4}$$

La fonction de départ $f(m,n)$ s'écrit alors par $f(m,n) = n^{-4}F(m/n)$ et l'identité (2) équivaut à

$$F(X) - \frac{1}{(X+1)^4}\,F\Big(\frac{X}{X+1}\Big) - F(1+X) = \frac{2}{X^2} \tag{5}$$

ou bien (puisque f est symétrique et par conséquent $F(X) = X^{-4}F(1/X)$)

$$F\big(X\big) \;=\; F\big(1+X\big) \;+\; X^{-4}\,F\big(1+1/X\big) \;+\; 2\,X^{-2}\,,$$

ce qui a maintenant bien la forme générale décrite dans (*).

Deuxième exemple : Fonction cotangente

Le deuxième exemple est encore plus élémentaire que le premier. On sait qu'on a la loi d'addition de la cotangente, qui dit que

$$\cot X \cot Y = \cot X \cot(X+Y) + \cot Y \cot(X+Y) + 1$$

(ce qu'on peut réécrire de façon plus symétrique en posant $Z = -X - Y$). Celà implique qu'on a pour la fonction de trois variables définie par

$$C(X,Y;T) = \frac{1}{4}\left(\coth\frac{XT}{2} + \coth\frac{YT}{2}\right)\left(\coth\frac{T}{2} - \coth\frac{XYT}{2}\right)$$

les relations suivantes (plus les mêmes en échangeant X et Y puisque $C(X,Y;T)$ est évidemment symétrique en X et Y) :

$$C(X,Y;T) + C\bigl(-\frac{1}{X}, Y; XT\bigr) = 0\,, \tag{6a}$$

$$C(X,Y;T) + C\bigl(1-\frac{1}{X}, Y; XT\bigr) + C\bigl(\frac{1}{1-X}, Y; (1-X)T\bigr) = 0\,. \tag{6b}$$

Noter que $X \mapsto 1 - 1/X$ est une application périodique d'ordre 3 : on a

$$1 - \frac{1}{1-\dfrac{1}{X}} = \frac{1}{1-X}\,, \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{\dfrac{1}{1-X}} = X\,.$$

Les relations (6), dont nous donnerons plus tard une application à des identités pour les polynômes de Bernoulli, ne ressemblent pas beaucoup à (*), mais elles en sont en quelque sorte duales. Pour rendre le lien plus visible on peut appliquer (6a) aux deux derniers termes de (6b) et remplacer ensuite X par $X+1$ pour obtenir

$$C(X,\,Y;\,T) = C(X+1,\,Y;T) - C(-1-1/X,\,Y;\,XT)\,,$$

ce qui a déjà beaucoup plus la même allure que (*). C'est pourtant plutôt la forme (6) qui est directement liée à la cohomologie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Mais avant d'expliquer ça je voudrais donner une généralisation qui a des propriétés beaucoup plus intéressantes.

Troisième exemple : Fonctions thêta

Pour celà, nous allons remplacer la fonction cotangente par une fonction moins élémentaire. Tout d'abord j'écris la fonction C d'une autre manière en utilisant la loi d'addition du cosinus (c'est donc vraiment des mathématiques d'école ici !) :

$$C(X,Y;T) = \frac{\sinh\left(\dfrac{X+Y}{2}T\right)\sinh\left(\dfrac{XY-1}{2}T\right)}{4\sinh\left(\dfrac{T}{2}\right)\sinh\left(\dfrac{XT}{2}\right)\sinh\left(\dfrac{YT}{2}\right)\sinh\left(\dfrac{XYT}{2}\right)}\,.$$

Nous allons maintenant la généraliser. On sait que les fonctions trigonométriques peuvent se généraliser en les *fonctions elliptiques*. Dans le cas présent, je vais prendre l'une des fonctions elliptiques les plus connues, la fonction thêta de Jacobi $\theta_\tau(u)$.

Une fonction elliptique dépend d'un paramètre supplémentaire qui est un nombre complexe, toujours noté τ, de partie imaginaire (strictement) positive, et on note toujours $q = e^{2\pi i\tau}$; bien qu'il ne va y avoir que des q dans ma formule, il faut toujours penser en termes de fonctions de τ parce que c'est τ qui est vraiment important et pas q. La fonction θ_τ est définie alors de la manière suivante :

$$\theta(u) = \theta_\tau(u) = \left(e^{u/2} - e^{-u/2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n e^u)(1-q^n e^{-u})}{(1-q^n)^2} \,.$$

Elle a des très jolies propriétés, par exemple l'identité de Jacobi

$$\theta_\tau(u) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, q^{n(n+1)/2} \, (e^{(n+1/2)u} - e^{-(n+1/2)u})}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (2n+1) \, q^{n(n+1)/2}}$$

que l'on ne va pas utiliser, mais qui est trop jolie pour qu'on ne la rappelle pas ; cette fonction et cette identité sont certainement parmi les plus belles de toutes les mathématiques.

Quand $\tau \to i\infty$, on a $q \to 0$ et le produit infini est réduit à 1. On a donc

$$\theta_{i\infty}(u) = 2 \sinh \frac{u}{2} \,;$$

la fonction sinh (ou sin) est donc un cas limite de θ_τ. Je remplace maintenant le sinus par la fonction θ_τ dans la définition de C. Cette nouvelle fonction

$$C_\tau(X,Y;T) = \frac{\theta((X+Y)T)\,\theta((XY-1)T)}{\theta(T)\,\theta(XT)\,\theta(YT)\,\theta(XYT)} \,, \tag{7}$$

qui dépend d'un paramètre supplémentaire τ, *satisfait toujours aux relations* (6). Ce n'est pas cette fois une conséquence de la loi d'addition de la fonction cotangente, mais des "relations thêta de Riemann" qui sont des relations extrêmement importantes dans la théorie des variétés abéliennes. C'est donc un théorème plus profond qu'avant qui joue un rôle, et il va donner comme application également quelque chose de plus profond, à savoir la théorie des périodes de formes modulaires, comme je vais l'expliquer dans quelques minutes. Mais j'aimerais d'abord mettre ça dans un contexte un peu plus mathématique en faisant intervenir la cohomologie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont il est question dans mon titre.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et sa cohomologie

Pour cela il faut que nous fassions connaissance avec le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ qui est le vrai héros de notre histoire :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1 \right\} .$$

En fait nous nous servirons plutôt du quotient de ce groupe par $\{\pm 1\}$, que nous noterons par Γ. Comme groupe abstrait, il est engendré par deux éléments S et U avec les relations

$$\Gamma = \left\langle\, S, U \mid S^2 = U^3 = \mathbf{1} \,\right\rangle ,$$

où

$$S = \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \pm\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{1} = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour nos besoins plus tard j'introduis également les éléments

$$T = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = US, \quad T' = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = U^2 S\,. \tag{8}$$

J'imagine maintenant que j'ai un espace vectoriel V sur lequel opère ce groupe Γ, donc une représentation du groupe Γ. On peut définir alors

$$H^1(\Gamma, V) = \frac{Z^1(\Gamma, V)}{B^1(\Gamma, V)}\,,$$

ce sont les *cocycles* divisés par les *cobords*.

Comment ces "cocycles" et "cobords" sont-ils définis? Ce sont les notions de base de la cohomologie. L'idée en les définissant est toujours pareille : les cocycles c'est ce qui nous intéresse et les cobords par lesquels on divise, c'est les cocyles "bêtes" qui ne nous intéressent pas. (Cela dépend évidemment de la situation : un jour on peut vouloir s'intéresser à ce qui n'était pas intéressant la veille, ou même trouver malin ce qu'on a trouvé bête avant.) Dans le cas qui nous concerne la définition est très simple. Tout d'abord, il me faut une notation : si $v \in V$ et $\gamma \in \Gamma$, je note $v|\gamma$ le résultat de l'opération de γ sur v (ce qui suppose que l'opération est à droite, c'est-á-dire que $(v|\gamma_1)|\gamma_2 = v|(\gamma_1\gamma_2)$ pour tout γ_1, $\gamma_2 \in \Gamma$). On définit alors

$$Z^1(\Gamma, V) = \{f : \Gamma \to V \mid f(\gamma_1\gamma_2) = f(\gamma_1)|\gamma_2 + f(\gamma_2) \ \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma\,\}$$

et d'autre part

$$B^1(\Gamma, V) = \big\{f : \Gamma \to V \;\big|\; \exists v_0 \in V \text{ tel que } f(\gamma) = v_0|\gamma - v_0 \ \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma\,\big\}\,.$$

On constate facilement que pour n'importe quel vecteur $v_0 \in V$ fixé, la fonction $\gamma \to v_0|\gamma - v_0$ possède effectivement la propriété de cocycle $f(\gamma_1\gamma_2) = f(\gamma_1)|\gamma_2 + f(\gamma_2)$. C'est la façon triviale de satisfaire cette relation ; le groupe vraiment intéressant est donc le quotient $H^1 = Z^1/B^1$.

Regardons ce que ça donne dans le cas de $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$. Si pour un cocycle f vous connaissez $f(\gamma_1)$ et $f(\gamma_2)$, alors vous connaissez aussi $f(\gamma_1\gamma_2)$. Donc il suffit de connaître un cocycle sur les générateurs du groupe, puisque après par récurrence vous l'avez pour tous les éléments. Dans notre cas, il suffit de spécifier $f(S)$ et $f(T)$. Nous allons nous intéresser aux cocycles appartenant au sous-groupe

$$Z^1_0(\Gamma, V) = \big\{f \in Z^1(\Gamma, V) \,\big|\, f(T) = 0\big\}$$

de $Z^1(\Gamma, V)$. Pour de tels cocycles, f est donc déterminé par la valeur de l'élément $Q = f(S) \in V$. Toutefois, on ne peut pas choisir n'importe quel Q parce que si l'on essaye de calculer la valeur du cocycle pour un élément $\gamma \in \Gamma$, on va s'apercevoir qu'à cause des relations on peut écrire un γ comme produit des générateurs S et T de Γ de plusieurs façons différentes et que ça donnerait des réponses différentes si le Q était mal choisi. Il se trouve que la fonction $T \mapsto 0$, $S \mapsto Q$ peut s'étendre à un cocycle $f : \Gamma \to V$ si et seulement si Q satisfait aux conditions

$$Q|(\mathbf{1} + S) = 0\,, \quad Q|(\mathbf{1} + U + U^2) = 0\,. \tag{9}$$

(Noter que $Q|(\mathbf{1}+S)$ signifie $Q+Q|S$ et non le résultat d'opérer sur Q avec la somme des matrices $\mathbf{1}$ et S, et de même $Q|(\mathbf{1}+U+U^2)$ veut dire $Q+Q|U+Q|U^2$.)

Tout ceci est assez abstrait. Regardons donc quelques exemples.

Les "relations de périodes"

Prenons d'abord pour V l'espace (de dimension infinie) des fonctions en trois variables $F(X,Y;T)$, paires en T, avec une opération de Γ donnée par

$$\bigl(F|\gamma\bigr)\bigl(X,Y;T\bigr) = F\bigl(\frac{aX+b}{cX+d},\, Y;\, (cX+d)T\bigr) \qquad \text{pour } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Alors les relations (6) disent exactement que l'élément $C \in V$ satisfait à (9) et définit donc un cocycle $f \in Z_0^1(\Gamma, V)$ par $f(S) = C$, $f(T) = 0$. La loi d'addition de la cotangente a donc une interprétation "cohomologique," comme on l'avait promis.

Si on considère dans (10) les fonctions $F(X,Y;T)$ comme des séries de puissances ou des séries de Laurent paires en T avec des fonctions qui sont des fonctions de X (nous ne mentionnons pas ici la variable Y qui ne joue aucun rôle dans (6)), alors on voit que l'opération induite par (10) sur le coefficient de T^K est celle donnée par

$$(f|_{-K}\gamma)(X) = (cX+d)^K f\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \quad \text{pour } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Ceci a un sens pour tout $K \in \mathbb{Z}$ si on prend $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et pour K pair si on considère $\gamma \in \Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$. On l'appelle l'opération de Γ *en poids* $-K$ (le signe "moins" dans cette définition a des raisons historiques et s'avérera pratique quand nous passons aux formes modulaires). Pour l'opération (11), les relations (9) décrivant les cocycles s'écrivent explicitement comme

$$\begin{gathered} Q\bigl(X\bigr) + X^K\, Q\bigl(\frac{-1}{X}\bigr) = 0\,, \\ Q\bigl(X\bigr) + X^K\, Q\bigl(1-\frac{1}{X}\bigr) + (X-1)^K\, Q\bigl(\frac{1}{1-X}\bigr) = 0\,. \end{gathered} \tag{12}$$

Je les appellerai les *relations de périodes*, parce qu'elles interviennent dans la théorie des périodes des formes modulaires, mais il y a d'autres exemples.

Soient $K = -4$ et $F(X)$ la fonction définie dans (4). Alors l'équation (5) qui était à la base de notre démonstration de $5\zeta(4) = 2\zeta(2)^2$ peut s'écrire

$$F - F|_4 T - F|_4 T' = \frac{2}{X^2}$$

avec T et T' comme ci-dessus (éq. (8)). Dans ce cas-ci on vérifie immédiatement que $Q = F$ satisfait à la deuxième des relations (12) mais non à la première (on a $F(X) + X^{-4}F(-1/X) = 2/X^2$), ceci étant dû au terme $2/X^2$ dans (5), le "terme additif supplémentaire" dont il a été question dans l'introduction. Plus généralement, on voit que notre équation fondamentale (*) s'écrit $F \approx F|T + F|T'$ et qu'elle est liée aux relations de cocycle (9) par

$$F - F|T - F|T' \;=\; F|(\mathbf{1}+S) - F|(\mathbf{1}+U+U^2)|S\,,$$

un calcul que nous avions déjà fait à la fin de la discussion du “deuxième exemple.”

Autres exemples. Je prends $K = -2$, $Q(X) = 1/X$. Alors Q satisfait à (12). Ou, plus stupide encore, $Q(X) = \log|X|$ en poids $K = 0$.

Mais il y a d'autres exemples, plus intéressants, en poids négatif. L'intérêt de prendre un poids négatif est qu'on peut avoir des solutions *polynomiales* de (12). (Si $K \geq 0$ et $f(X)$ est un polynôme de degré $\leq K$, alors le membre de droite de l'équation (11) est également un polynôme.)

Pour $K = 2$, par exemple, on trouve les deux solutions $Q(X) = X^2 - 1$ et $Q(X) = X^3 - 5X + 1/X$ de (12). La première est un polynôme, la deuxième est “presque” un polynôme.

De la même manière, pour $K = 4$, on trouve les deux solutions $Q(X) = X^4 - 1$ et $Q(X) = 2X^5 - 7X^3 - 7X + 2/X$, et pour $K = 6$ les solutions $X^6 - 1$ et $3X^7 - 10X^5 - 7X^3 - 10X + 3/X$.

En général pour $K = k - 2$ avec n'importe quel entier $k > 2$ pair, il y a deux fonctions spéciales qui marchent toujours, à savoir

$$P_k^+(X) = X^{k-2} - 1 \tag{13}$$

que vous aviez déjà devinée, et une autre, presque polynômiale, donnée par

$$P_k^-(X) = \sum_{n=0}^{k} \frac{B_n}{n!} \frac{B_{k-n}}{(k-n)!} X^{n-1} \tag{14}$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli, définis par $\sum_{n=0}^{\infty} B_n X^n/n! = X/(e^X - 1)$ ($B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0, \ldots$). La vérification de (12) pour P_k^+ est triviale. Pour P_k^- elle équivaut aux relations (6). En effet, en utilisant le développement de Laurent $\frac{1}{2} \coth \frac{X}{2} = \sum_{n \geq 0 \text{ pair}} \frac{B_n}{n!} X^{n-1}$ on trouve le développement

$$C(X, Y; T) = \frac{(X+Y)(XY-1)}{X^2Y^2} T^{-2} - \sum_{\substack{k \geq 4 \\ k \text{ pair}}} \left[P_k^+(X)P_k^-(Y) + P_k^+(Y)P_k^-(X)\right] T^{k-2},$$

S'il n'y avait que ça, ce serait absolument dépourvu d'intérêt. Mais si on continue (à la main ou à l'aide d'un ordinateur), il apparaît quelque chose d'intéressant.

Formes modulaires

Si je continue comme ci-dessus, je trouve que pour $k = 4$, 6, 8, 10 et 14 il n'y a pas d'autres solutions polynomiales ou presque polynomiales de (12) (avec $K = k - 2$) que P_k^+ et le P_k^-. Mais pour $k = 12$, il y en a deux autres, qui sont :

$$\begin{aligned} Q_{12}^+(X) &= X^8 - 3X^6 + 3X^4 - X^2\,, \\ Q_{12}^-(X) &= 4X^9 - 25X^7 + 42X^5 - 25X^3 + 4X\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Donc pour la première fois j'ai quatre solutions linéairement indépendantes. Celà provient de l'existence de formes modulaires non-triviales.

Rappelons la définition. Je considère les fonctions $f(\tau)$ holomorphes dans $\Im(\tau) > 0$, et je demande qu'elles soient petites à l'infini, mais surtout qu'elles soient invariantes par l'opération du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ en poids k définie en (11), c'est-à-dire que

$$f\Big(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\Big) = (c\tau+d)^k\, f(\tau) \quad \forall\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ \Im(\tau) > 0.$$

Une telle fonction s'appelle une *forme modulaire de poids k.*

Les exemples les plus simples sont

$$\begin{aligned} G_4(\tau) &= \frac{1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + \cdots \\ G_6(\tau) &= -\frac{1}{504} + q + 33q^2 + 244q^3 + \cdots \end{aligned}$$

(rappelez que $q = e^{2\pi i\tau}$) et plus généralement pour tout entier pair $k \geq 4$ la *série d'Eisenstein de poids k*

$$G_k(\tau) = -\frac{B_k}{2k} + q + (2^{k-1}{+}1)\, q^2 + (3^{k-1}{+}1)\, q^3 + (4^{k-1}{+}2^{k-1}{+}1)\, q^4 + \cdots$$

où B_k est le k-ième nombre de Bernoulli qu'on a déjà vu et le coefficient de q^n pour $n \geq 1$ est la somme des puissances $k-1$-ièmes des diviseurs de n. Il n'est pas du tout évident sur cette définition (et pour $k = 2$ ce n'est même pas vrai) que G_k soit une forme modulaire. Ça provient du fait que

$$G_k(\tau) \;=\; -\frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k} \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\tau+n)^k} \qquad (k \geq 4),$$

où la somme porte sur tous les entiers de $\mathbb{Z}$ non tous deux nuls. La propriété modulaire est presque évidente dans cette nouvelle définition, tandis qu'un calcul facile et classique montre que le développement de Fourier de cette fonction est bien celui donné ci-dessus.

S'il n'y avait pas d'autres exemples que ceux-là, ce ne serait pas très intéressant. Mais comme tout à l'heure avec les polynômes, pour la première fois pour $k = 12$ on trouve quelque chose de nouveau. Je définis

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= q(1-q)^{24}(1-q^2)^{24}(1-q^3)^{24}\cdots \\ &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 1} \tau(n)\, q^n\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Alors c'est une forme modulaire, de poids 12. (Encore une fois, ceci n'est pas évident. Il y a plusieurs démonstrations, pas très difficiles, mais je ne veux pas en parler.) Cette fonction est beaucoup plus mystérieuse que les séries d'Eisenstein. En particulier, les coefficients $\tau(n)$ ne sont plus données par une loi simple : la fonction $n \mapsto \tau(n)$, appelée la fonction τ de Ramanujan, est parmi les plus célèbres en théorie des nombres.

Écrivons M_k pour l'espace des formes modulaires de poids k. Là-dedans, j'ai ce qu'on appelle les *formes paraboliques*, notées M_k^0, qui sont les formes modulaires ayant un développement de Fourier $f(\tau) = 0 + a_1 q + \cdots$ sans terme constant. La fonction $\Delta \in M_{12}^0$ est un exemple d'une telle forme. On connaît tout à fait bien la structure des espaces M_k et M_k^0. En particulier, les dimensions sont comme suit :

k	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$\dim M_k$	1	0	1	1	1	1	2	1	2
$\dim M_k^0$	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Cette table implique par exemple qu'il y a une relation linéaire entre Δ, G_4 et G_6, et en effet on a

$$\Delta = 8000 G_4^3 - 147 G_6^2 \,.$$

La preuve de cette relation est triviale dès que l'on sait que tout est modulaire et que $\dim M_{12} = 2$, mais comme identité entre les coefficients dans les q-développements de G_4, G_6 et Δ elle n'est pas triviale du tout. En général, la table des dimensions implique que tout élément de M_k est un polynôme en G_4 et G_6.

Périodes des formes modulaires

Quel est le lien entre tout ceci et ce qui précède ? Pour tous les k, j'avais les deux polynômes ou presque polynômes P_k^+ et P_k^- satisfaisant aux relations (12) (avec $K = k - 2$). Mais la première fois que j'avais d'autres solutions, c'était pour $k = 12$, où il y avait aussi pour la première fois une forme parabolique. Ça doit être lié, et en effet ça l'est : Il y a une façon assez jolie d'associer à chaque $f \in M_k^0$ un polynôme pair r_f^+ et un polynome impair r_f^- qui satisfont tous deux à (12). (On peut faire de même avec G_k, mais la définition est moins jolie, et les "polynômes" que l'on obtient sont les fonctions P_k^+ et P_k^- que nous connaissons déjà.) Voyons ça pour le cas de Δ.

Soient $\tau(n)$ ($n \geq 1$) les coefficients définis par (16), et posons pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{11}} \cos(2\pi n x)\,, \qquad F_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{11}} \sin(2\pi n x)\,. \tag{17}$$

On sait que $\tau(n) = \mathrm{O}(n^6)$ (en fait on sait mieux que ça, mais c'est largement suffisant pour ce que je veux faire). Les deux séries convergent alors assez rapidement et on peut les calculer tout à fait bien sur la machine, ou faire dessiner un graphique si on veut. Les fonctions F_+ et F_- sont périodiques et lisses (mais pas ultra-lisses : elle sont bien différentiables, même deux fois, trois fois, quatre fois, mais pas cinq fois différentiables). Et elles ont la propriété merveilleuse qui suit.

Pour F_- par exemple, posons

$$r_\Delta^-(X) \;=\; F_-(X) + X^{10}\, F_-(1/X) \;=\; F_-(X) - X^{10}\, F_-(-1/X).$$

On peut écrire le membre de droite comme $r_\Delta^- = F_-|(\mathbf{1} - S)$, où $| = |_{-10}$ indique l'opération de Γ en poids -10. La fonction r_Δ^- est donc automatiquement tuée par $\mathbf{1} + S$ en poids -10, puisque

$$r_\Delta^-|(\mathbf{1} + S) = F_-|(\mathbf{1} - S)|(\mathbf{1} + S) = F_-|(\mathbf{1} - S^2) = 0\,,$$

et un calcul analogue, en utilisant le fait que $F_-|T = F_-$ et le lien entre T, U et S, donne que

$$r_\Delta^-|(1+U+U^2) = F_-|(1-S)(1+U+U^2) = F_-|(T-1)S(1+U+U^2) = 0\,.$$

En d'autres mots, la fonction r_Δ^- satisfait aux équations (12) avec $K=10$.

Tout ceci resterait évidemment vrai si les coefficients $\tau(n)$ en (17) étaient remplacés par n'importe quels nombres de croissance pas trop rapide. Mais maintenant vient le miracle : le fait que $\Delta(\tau)$ soit une forme modulaire implique que la fonction $r_\Delta^-(X)$ est un *polynôme* de degré ≤ 10, donc forcément proportionnelle à l'un de nos polynômes de tout à l'heure, et en effet on a

$$r_\Delta^-(X) = 1.5390805167\ldots\cdot\bigl[4X^9 - 25X^7 + 42X^5 - 25X^3 + 4X\bigr]\,,$$

un multiple du polynôme impair $Q_{12}^-(X)$ définie en (15). Et la même chose pour la fonction F_+ : en posant $r_\Delta^+ = F_+|_{-10}(1-S) = F_+(X) - X^{10}F_+(1/X)$ on trouve

$$r_\Delta^+(X) = 18.99161508\ldots\cdot\bigl[-\frac{36}{691}(X^{10}-1) + X^8 - 3X^6 + 3X^4 - X^2\bigr]\,,$$

une combinaison linéaire des deux polynômes $P_{12}^+(X)$ et $Q_{12}^+(X)$ qui sont les solutions fondamentales paires de nos relations de périodes. Les deux fonctions $r_\Delta^\pm$ s'appellent les *polynômes de périodes* de la fonction Δ.

Il me reste à expliquer *pourquoi* la modularité de Δ implique que les fonctions $r_\Delta^\pm$ soient des polynômes. Ce n'est pas très difficile. Posons

$$F(\tau) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\tau(n)}{n^{11}}\,e^{2\pi i n\tau} \qquad (\tau\in\mathbb{C},\ \Im(\tau)\ge 0).$$

Pour $\tau = X \in \mathbb{R}$ la série converge comme $\sum n^{-5}$ et on a $F(X) = F_+(X) + iF_-(X)$ avec F_+ et F_- définis par (17). Mais pour $\Im(\tau) > 0$ la convergence est beaucoup plus rapide et on peut différentier $F(\tau)$ autant de fois qu'on veut. En particulier, on trouve

$$\Bigl(\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{d\tau}\Bigr)^{11} F(\tau) = \sum_{n=1}^\infty \tau(n)\,e^{2\pi i n\tau} = \Delta(\tau)\,.$$

Un calcul banal montre alors que

$$\Bigl(\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{d\tau}\Bigr)^{11}\Bigl(F(\tau) - \tau^{10}\,F\bigl(-\frac{1}{\tau}\bigr)\Bigr) = \Delta(\tau) - \tau^{-12}\Delta\bigl(-\frac{1}{\tau}\bigr)\,.$$

La modularité de Δ implique que ceci s'annule ; la fonction $F(X) - X^{10}F(-1/X)$ (dont les parties réelle et imaginaire sont r_Δ^+ et r_Δ^-) est donc un polynôme.

Ce lien entre les formes modulaires et les polynômes, découvert et étudié par Eichler, Shimura et Manin, est tout à fait remarquable et possède de nombreuses applications dans la théorie des formes modulaires. On peut si on veut l'utiliser dans le sens inverse pour construire les formes modulaires d'un poids donné k. Pour cela on commence par trouver les polynômes qui satisfont à (12) (avec $K = k-2$), ce qui est un calcul facile : on n'a qu'à résoudre un système d'équations linéaires à coefficients rationnels. Pour construire à partir de là les formes paraboliques—il vaut mieux ne prendre que les solutions impaires de (12), pour éviter les ennuis avec la fonction $P_k^+(X)$ et les séries d'Eisenstein—on procède comme suit.

Soit $Q(X)$ le polynôme donné, par exemple $4X^9 - 25X^7 + 42X^5 - 25X^3 + 4X$ dans le cas $k = 12$. Nous cherchons une fonction périodique impaire $F(x) = \sum c_n \sin(2\pi i n x)$ telle que $Q(x)$ s'écrive comme $F(x) - x^{k-2}F(-1/x)$; alors $f(\tau) = \sum n^{k-1}\, c_n\, e^{2\pi i n\tau}$ sera notre forme parabolique. La première remarque c'est que quand x tend vers 0, alors $x^{k-2}F(-1/x)$ tend vers zéro (la fonction F est périodique, donc bornée, et $k > 2$). Cela implique $F(0) = Q(0)$, et voilà déjà une valeur de F. Mais comme F est périodique, ça donne aussi la valeur à tous les entiers : $F(n) = F(0) = Q(0)$. La relation entre $F(-1/n)$ et $F(n)$ donne maintenant toutes les valeurs $F(-1/n)$, donc aussi les valeurs $F(m-1/n)$, et en répétant ce procédé on trouve F pour chaque nombre rationnel après un nombre fini d'étapes (algorithme d'Euclide). Puisque les nombres rationnels sont denses et que la fonction F est lisse, on peut ainsi calculer toutes les valeurs de F à l'aide de l'approximation des nombres réels par les rationnels. En d'autres termes, la fonction $F(x)$ est une fonction tout à fait calculable, et une fois que vous l'avez, vous en faites l'analyse de Fourier pour trouver c_n et $f(\tau)$.

La fonction $C_\tau(X, Y; T)$ et les périodes

Je veux maintenant montrer le lien entre la théorie qu'on vient de décrire et la fonction $C_\tau(X, Y; T)$ introduite dans notre "troisième exemple" au début. La fonction θ_τ qui intervient dans sa définition satisfait à la loi de transformation

$$\theta_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\Big(\frac{u}{c\tau+d}\Big) = \frac{1}{c\tau+d}\,\exp\Big(\frac{cu^2/4i\pi}{c\tau+d}\Big)\,\theta_\tau(u)\,,$$

qui serait la loi de transformation d'une forme modulaire (de poids -1) si on n'avait pas le terme en exponentielle de u^2. Mais justement ce terme disparaît dans la combinaison C_τ car les arguments intervenant dans sa définition vérifient

$$1^2 + X^2 + Y^2 + (XY)^2 = (X+Y)^2 + (XY-1)^2\,.$$

Cela implique que la fonction C possède la formule de transformation

$$C_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\big(X, Y; \frac{T}{c\tau+d}\big) = (c\tau+d)^2\, C_\tau\big(X, Y; T\big)\,,$$

elle est donc vraiment modulaire (et c'est la combinaison multiplicative des fonctions thêta la plus simple qui ait cette propriété). Par conséquent, si j'écris

$$C_\tau(X, Y; T) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(X, Y; \tau)\, T^{k-2}$$

(ça commence par un terme $1/T^2$, c'est pourquoi j'ai mis $k-2$), alors quand je transforme par un élément $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, j'obtiens

$$c_k(X, Y; \tau)|_k\gamma = c_k(X, Y; \tau)\,.$$

La fonction $c_k(X,Y;\tau)$ est donc une forme modulaire (en τ) de poids k pour tout $k \ge 0$ et pour tout X et Y. Elle est d'ailleurs tout à fait calculable, le développement de $\theta_\tau(u)$ en série de puissances en u étant connu. Le lien avec la théorie expliquée avant est le fait suivant, démontré en [13] : on a une décomposition

$$c_k(X,Y;\tau) = \sum_{j=1}^{\dim M_k(\Gamma)} f_{k,j}(\tau)\left[p_{k,j}^+(X)\,p_{k,j}^-(Y) + p_{k,j}^-(X)\,p_{k,j}^+(Y)\right]$$

où $f_{k,j} \in M_k(\Gamma)$ et les $p_{k,j}^+$ (resp. $p_{k,j}^-$) sont des fonctions paires (resp. impaires), cette décomposition est unique à la numérotation et la normalisation de $f_{k,j}$, $p_{k,j}^+$ et $p_{k,j}^-$ près, et on a en plus:

- la forme $f_{k,1}(\tau)$ pour $k \ge 4$ est un multiple de la série d'Eisenstein $G_k(\tau)$, tandis que les fonctions $p_{k,1}^\pm(X)$ sont proportionnelles aux fonctions $P_k^\pm(X)$;
- les autres formes $f_{k,j}(\tau)$ $(1 < j \le \dim M_k(\Gamma)$ sont la base canonique de $M_k^0(\Gamma)$ donnée par les "formes de Hecke" (je ne précise pas, mais pour $k = 12$ c'est juste la fonction Δ) et $p_{k,j}^\pm(X)$ des multiples non nuls de leur polynômes de périodes pairs et impairs.

Par exemple, pour $k = 0$, 2, 4 et 12 on trouve

$$c_0(X,Y;\tau) = \frac{(X+Y)(XY-1)}{X^2Y^2}\,,$$
$$c_2(X,Y;\tau) = 0\,,$$
$$c_4(X,Y;\tau) = 240\,G_4(\tau)\left[(X^2-1)(Y^3-5Y+Y^{-1}) + (X^3-5X+X^{-1})(Y^2-1)\right],$$
$$c_{12}(X,Y;\tau) = \frac{65520}{691}\,G_{12}(\tau)\left[P_{12}^+(X)P_{12}^-(Y) + P_{12}^-(X)P_{12}^+(Y)\right]$$
$$-\frac{2}{10!}\,\Delta(\tau)\left[\Big(\frac{36}{691}P_{12}^+(X) - Q_{12}^+(X)\Big)Q_{12}^-(Y) + Q_{12}^-(X)\Big(\frac{36}{691}P_{12}^+(Y) - Q_{12}^+(Y)\Big)\right].$$

La connaissance de la seule fonction C_τ nous donne ainsi des renseignements complets sur *toutes* les formes modulaires sur Γ et sur leurs polynômes de périodes, et l'identité (6) équivaut aux relations de périodes pour toutes les fonctions $p_{k,j}^\pm(X)$ en même temps, comme on l'avait déjà vu pour les polynômes spéciaux $P_k^\pm(X)$ en utilisant la fonction $C(X,Y;T) = C_{i\infty}(X,Y;T)$.

Fonctions zêta doubles

Il y a plusieurs autres applications de notre thème général dont j'aurais voulu vous parler si le temps l'avait permis ; j'en mentionnerai quelques-unes à la fin de l'exposé. Mais il y a deux exemples que je ne voudrais en aucun cas omettre : un concernant les valeurs des fonctions zêta doubles et un autre concernant l'analyse spectrale sur $H/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$.

De la même manière que l'on définit

$$\zeta(2) = \sum_{0<n}\frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \zeta(3) = \sum_{0<n}\frac{1}{n^3} = 1.2020569031\ldots$$

(on ne peut pas calculer $\zeta(3)$ exactement, mais ce n'est pas une raison pour ne pas en parler!), on définit les *valeurs de fonctions zêta multiples* comme

$$\zeta(2,3) = \sum_{0<m<n}\frac{1}{m^2n^3}\,, \qquad \zeta(2,1,3) = \sum_{0<m<n<p}\frac{1}{m^2np^3}\,.$$

Ce sont des nombres extrêmement intéressants. En particulier, si l'on connaissait toutes les relations sur $\mathbb{Q}$ entre ces nombres, celà aurait apparemment des conséquences dans des domaines assez inattendus, par exemple l'étude des invariants des nœuds de Vassiliev et Kontsevich [6]. Ces relations sont d'ailleurs très nombreuses : par exemple, les calculs numériques [16] indiquent que parmi les $2^{10} = 1024$ valeurs zêta multiples $\zeta(n_1, \ldots, n_r)$ de poids total $n_1 + \cdots + n_r = 12$ il n'y a que 12 qui soient linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, et qu'il existe des relations surprenantes et jolies comme $\zeta(1,3,1,3,1,3) = 2\pi^{12}/14!$.

Le cas dont je vais parler ici est le cas des valeurs doubles

$$\zeta(a,b) = \sum_{0<m<n} \frac{1}{m^a\, n^b} \qquad (a \geq 1, \quad b \geq 2)\,. \tag{18}$$

Dans ce cas on sait tout faire, on connait toute la réponse, et elle est "isomorphe" à la théorie des périodes des formes modulaires, bien qu'il n'y ait rien de visiblement modulaire dans la définition (18).

Tout d'abord, je voudrais mentionner le lien avec les choses que j'ai faites au début de cet exposé. J'avais considéré une fonction $f(m,n)$ qui était une combinaison linéaire de termes comme $f_1(m,n) = 1/m^3 n$, et j'avais calculé certains sommes dont par exemple

$$\sum_{m,n>0} f_1(m+n,n) = \sum_{m,n>0} \frac{1}{(m+n)^3 n} = \sum_{0<n<m} \frac{1}{nm^3} = \zeta(1,3)\,,$$

la somme sur m, n positifs de l'expression $f_1(m+n,n)$ étant égale à la somme sur $0 < n < m$ de $f(m,n)$ puisqu'on peut renommer $m+n$ en m. Les sommes avec lesquelles j'ai commencé mon exposé sont donc précisément des valeurs zêta doubles. Et là j'ai trouvé que dans certains cas, comme les fonctions f définie en (1) ou en (3), on avait une identité de la forme

$$f(m,n) - f(m+n,n) - f(m,m+n) = \sum_{\substack{0<j<k \\ j \text{ pair}}} \frac{c_j}{m^j\, n^{k-j}} \;\in \mathbb{Q}\left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right], \tag{19}$$

qui était directement lié à la rationalité de $\zeta(k)/\zeta(2)^{k/2}$ pour k pair : la relation (19) implique $f(1,1)\zeta(k) = \sum c_j \zeta(j)\zeta(k-j)$ par l'argument donné au début. Remarquez que si le membre de droit de (19) était exactement 0, ce serait la relation

$$f - f|T - f|T' = 0$$

qui est équivalent aux deux relations de période $f|(1+S) = f|(1+U+U^2) = 0$ comme nous l'avons vu à plusieurs reprises.

Une solution de (19) pour chaque k pair est toujours donnée par la fonction (3) (avec $c_j = 2$ pour tout j), mais pour $k \geq 8$ il y a d'autres solutions de cette équation telles que

$$f(m,n) = \frac{2}{m^3 n^5} + \frac{3}{m^4 n^4} + \frac{2}{m^5 n^3}, \quad f(m,n) - f(m+n,n) - f(m,m+n) = \frac{6}{m^4 n^4}$$

pour $k=8$ (corollaire : $7\zeta(8)=6\zeta(4)^2$) ou

$$f=\frac{10}{m^3n^7}+\frac{15}{m^4n^6}+\frac{16}{m^5n^5}+\frac{15}{m^6n^4}+\frac{10}{m^7n^3},\quad f-f|T-f|T'=\frac{30}{m^4n^6}+\frac{30}{m^6n^4}$$

pour $k=10$. Ce phénomène est lié avec la théorie des formes modulaires par une sorte de dualité. On peut montrer que le nombre de solutions linéairement indépendantes de (19) est donné par $\delta_k=\lfloor\frac{k+4}{6}\rfloor$, où $\lfloor x\rfloor$ signifie la partie entière de x. Ce nombre est lié à la dimension de l'espace $M_k(\Gamma)$ des formes modulaires de poids k par la formule simple $\delta_k+\dim M_k^0(\Gamma)=\lfloor\frac{k}{4}\rfloor$ et ceci n'est pas une coïncidence. Grosso modo, la raison est que chaque identité de la forme (19) implique une identité entre la série d'Eisenstein $G_k(\tau)$ et les produits des séries d'Eisenstein $G_j(\tau)G_{k-j}(\tau)$, et ces identités correspondent à des relations entre les coefficients des polynômes de périodes impairs $r_-(f)$ valables pour toutes les formes $f\in M_k^0(\Gamma)$.

Le même nombre δ_k apparaît une deuxième fois dans le calcul des valeurs $\zeta(a,b)$. Si on essaie d'exprimer ces valeurs en termes élémentaires (c'est-à-dire comme combinaisons linéaires de produits des valeurs de la fonction zêta de Riemann, supposées connues), on découvre que c'est toujours possible pour des poids $k=a+b$ impairs, tandis que pour k pair cela n'est plus vrai dès que $k\ge 8$. Pour expliquer le résultat, il est commode de mettre ensemble les fonctions zêta doubles pour un poids donné :

$$Z_k(X)=\sum_{n=2}^{k-1}\zeta(k-n,n)\,X^{n-1}\,.$$

(On ne peut pas commencer la somme à $n=1$, parce que $\zeta(k-1,1)$ diverge.) Alors avec le même raisonnement que ci-dessus on trouve que

$$Z_k(1+X)+X^{k-2}Z_k(1+\frac{1}{X})\;=\;\text{élémentaire}$$

où "élémentaire" représente une combinaison de produits de valeurs de ζ ordinaires. Pour k impair on peut montrer que cette relation et l'identité évidente

$$\zeta(a,b)+\zeta(b,a)=\Bigl(\sum_{m>n>0}+\sum_{n>m>0}\Bigr)\frac{1}{m^a\,n^b}=\zeta(a)\,\zeta(b)-\zeta(a+b)\qquad(a,\,b>1)$$

suffisent à calculer toutes les valeurs $\zeta(k-n,n)$, mais pour $k\ge 8$ pair on perd quelque-chose. Par exemple, pour $k=7$, on trouve que le polynôme

$$Z_7(X)=\zeta(1,6)X^5+\zeta(2,5)X^4+\zeta(3,4)X^3+\zeta(4,3)X^2+\zeta(5,2)X$$

est donné par

$$\begin{aligned}Z_7(X)=\;&\zeta(7)\,(3X^5-11X^4+17X^3-18X^2+10X)\\&-\zeta(2)\,\zeta(5)\,(X^5-5X^4+10X^3-10X^2+4X)\\&-\zeta(3)\,\zeta(4)\,(X^5-2X^4-X^2+2X)\,,\end{aligned}$$

ce qui exprime tous les $\zeta(7-n,n)$ comme combinaisons linéaires à coefficients rationnels (en fait ici à coefficients entiers) des trois expressions $\zeta(7)$, $\zeta(2)\zeta(5)$ et $\zeta(3)\zeta(4)$ ayant poids 7. Par contre, pour $k=10$ on obtient seulement

$$\begin{aligned}Z_{10}(X) = {} & \frac{\zeta(10)}{4}\bigl(7X^8 - 16X^7 + 5X^6 - \frac{3}{5}X^5 - 2X^4 + X^3 - 9X^2 + \frac{93}{5}X\bigr) \\ & - \zeta(3)\zeta(7)\bigl(X^8 - 2X^7 - X^2 + 2X\bigr) \\ & - \zeta(5)^2\bigl(\frac{1}{2}X^8 - 4X^6 + 5X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 5X^3 + 4X^2\bigr) \\ & + C\bigl(2X^7 - 7X^6 + 7X^5 - 7X^3 + 7X^2 - 2X\bigr),\end{aligned}$$

où

$$C = 0.7919571754219072030131527445238250768531405494830 6\ldots$$

est un nombre qu'on ne connait que numériquement. (L'identité n'est cependant pas vide car il y a beaucoup plus de coefficients que de constantes, de façon qu'on obtient tous les $\zeta(a,b)$ avec $a+b=10$ à l'aide d'un seul d'entre eux (par exemple $\zeta(8,2)$) et des produits $\zeta(a)\,\zeta(10-a)$.) En général, pour k pair et $k \geq 8$ on a besoin d'exactement $\delta_k - 1 = \lfloor (k-2)/6 \rfloor$ constantes supplémentaires pour exprimer toutes les valeurs $\zeta(n,k-n)$, le nombre C ci-dessus étant un exemple d'une telle constante. C'est donc lié de façon mystérieuse avec la théorie des formes modulaires. Il serait très intéressant de savoir s'il existe une expression pour ces nombres inconnus en termes modulaires.

Les périodes des formes modulaires de Maass

Comme dernier exemple, je veux parler d'une application en analyse spectrale. C'est un miracle découvert par John Lewis, et on ne comprend pas encore tout à fait pourquoi c'est vrai.

Avant, nous avions étudié des fonctions F satisfaisant à une identité du type

$$F(z) = F(z+1) + z^s\,F(1+\frac{1}{z}) \tag{20}$$

pour un certain entier s (qui portait alors le nom k ou $2-k$) positif ou négatif. L'idée maintenant est de prendre s complexe. Alors on n'a plus l'interprétation cohomologique : on ne peut plus poser

$$(f|_s\gamma)(z) = (cz+d)^{-s} f\bigl(\frac{az+b}{cz+d}\bigr)\,,$$

car les déterminations multiples de l'exponentielle font que ceci n'est plus une opération de groupe. Mais si la fonction F est définie sur $\mathbb{C}-]-\infty,0]$, et si on définit $z^{-s} = e^{-s\log z}$ avec la détermination principale du logarithme, alors, comme $z+1$ et $1+1/z$ sont aussi dans $\mathbb{C}-]-\infty,0]$, la relation (20) a quand même un sens précis, et nous pouvons considérer les fonctions F holomorphes sur ce domaine. Alors pour tout $s \in \mathbb{C}$, on peut se demander s'il y a des solutions à l'équation (20).

Une réponse, pas très intéressante, est oui, il y a une fonction qui marche toujours : je prends la fonction définie pour $\Re(s) > 1$ par

$$F_s(z) = \sum_{m,n\geq 0}^{*} \frac{1}{(mz+n)^s}$$

et pour s quelconque par prolongement analytique. Le $*$ signifie que l'on omet le point $(m, n) = (0, 0)$ et que les points sur le bord (avec m ou n nuls) sont multipliés par le coefficient $1/2$.

Cette fonction est une sorte de "moitié d'une série d'Eisenstein" et on vérifie sans peine qu'elle satisfait bien à l'équation (20). (La preuve est très simple : vous avez une sommation sur un quart de plan. Quand vous remplacez z par $z + 1$ ça vous donne les $m \leq n$, et quand vous remplacez z par $1 + 1/z$ ça vous donne les $m \geq n$, avec multiplicité $1/2$ en cas d'égalité, exactement comme dans la démonstration que j'ai donnée au début de l'exposé.)

La véritable question est y en a-t-il d'autres ? Réponse : oui, si on ne met pas de conditions de croissance. Mais si on impose une condition de croissance faible à l'infini, et si on exclut le cas des s entiers, alors on a la réponse suivante, vraiment magnifique, due à Lewis [7] : Il existe une autre solution que $F = F_s$ si et seulement si le nombre $\lambda = \frac{s}{2}\left(1 - \frac{s}{2}\right)$ appartient au spectre du Laplacien opérant sur H/Γ, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une fonction $u \in L^2(H/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}))$ qui soit solution de l'équation de Laplace

$$\Delta u = \lambda u \,, \qquad \Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) .$$

Une telle fonction s'appelle une *forme modulaire de Maass*, et on sait que les valeurs propres λ forment un sous-ensemble dénombrable et discret de $[0, \infty)$, la valeur la plus petite étant environ 89.

Il y a donc deux problèmes non triviaux qui se résolvent mutuellement : Pour un s donné, soit il existe une forme modulaire de Maass avec valeur propre $\frac{s}{2}\left(1 - \frac{s}{2}\right)$, et dans ce cas notre équation (20) admet une solution non-triviale, soit il n'existe pas de telle forme, et notre problème n'admet pas de solution lui non plus.

Le lien entre u et F est tout à fait analogue au passage d'une forme modulaire à son polynôme de périodes. Les détails étant un peu compliqués, je ne les donne pas ici. Pour le lecteur qui veut en savoir plus, je renvois au papier originel de Lewis [7] et au papiers plus expositoires [8], [9].

Autres applications

Comme je l'ai déjà mentionné, il y a plusieurs généralisations des choses décrites dans cet article et plusieurs autres endroits où l'équation (*) ou une de ses variantes apparaît de façon naturelle dans une situation mathématique. Voici une liste très raccourcie, avec quelques références.

- Outre les solutions polynomiales de (12) avec $K \geq 0$ il existe aussi des solutions en fonctions rationnelles pour $K < 0$ (poids positif), et celles-ci sont encore une fois étroitement liées aux formes modulaires sur Γ (cf. [1] et les références données là).
- Le lien que nous avons décrit entre la loi d'addition de la fonction cotangente et les relations de type période s'étend aux polynômes de Bernoulli et donne des lois de réciprocité générales pour les sommes de Dedekind (cf. [4], [12]). En fait, les lois de réciprocité des sommes de Dedekind et leurs généralisations ne sont pas seulement *analogues* aux relations satisfaites par les polynômes de périodes des formes modulaires, mais elles y sont directement liées. Ceci a été conjecturé en [3] et démontré en [2].
- Il y a des liens étroits entre la théorie décrite ici et l'arithmétique des corps quadratiques réels, et on peut construire des polynômes très explicites satisfaisant aux rélations de périodes (12) comme des sommes des puissances $\frac{K-2}{2}$-ièmes des polynômes quadratiques réduits d'un discriminant donné [5]. Ceci a des applications amusantes. Par exemple, la fonction

$$F(x) = \sum_{\substack{a,\, b,\, c \in \mathbb{Z},\, a<0 \\ b^2-4ac=5}} \max(0,\, ax^2+bx+c) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

  a la valeur constante $F(x) = 2$, et ceci provient directement du fait qu'il n'y a pas de forme modulaire parabolique de poids 4 ! Si on remplace "5" par un autre discriminant $D > 0$, alors la fonction $F(x)$ est toujours constante, mais avec une autre valeur c_D, et ce nombre c_D est hautement intéressant : c'est (à un facteur multiplicatif trivial près) la valeur en $s = 2$ de la fonction zêta de Dedekind du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Si on remplace le terme $\max(0,\, ax^2+bx+c)$ par sa troisième puissance, alors la fonction F a toujours une valeur constante (essentiellement la valeur de $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}(4)$), mais pour la 5ième puissance elle n'est plus constante (ou même C^∞) : c'est maintenant une combinaison linèaire de la fonction 1 et de la fonction $F_+(x) = \sum n^{-11}\tau(n)\cos(2\pi nx)$ définie dans (17), avec des coefficients dépendants de D.
- En utilisant les idées décrites ici on peut donner une démonstration très simple de la formule de traces d'Eichler-Selberg dans le cas holomorphe [14] (si on utilise la théorie des périodes des formes modulaires classique) et même dans le cas non holomorphe [9] (si on se sert du résultat de Lewis reliant les formes de Maass avec les solutions de l'équation (20)).
- Enfin, il y a un lien avec la théorie des polyèdres rationnels. Par exemple, les invariants additifs appelés "scissors polynomials" en dimension 2 sont exactement les solutions polynomiales et presque polynomiales de (12) que nous avons étudiées (cf. [10], p. 223). Ceci est lié aussi à la théorie des sommes de Dedekind et leur généralisations multidimensionnelles (cf. [11]).

Références

[1] Y-J. Choie et D. Zagier, *Rational period functions for $PSL(2,\mathbb{Z})$*, dans "A Tribute to Emil Grosswald: Number Theory and Related Analysis", Contemporary Mathematics **143**, AMS, Providence (1993), 89–108.

[2] S. Fukuhara, *Modular forms, generalized Dedekind sums and period polynomials*, preprint, 1995.

[3] S. Fukuhara et N. Maruyama, *An axiomatic approach to generalized Dedekind sums*, preprint, 1995.

[4] R. Hall, J. Wilson et D. Zagier, *Reciprocity formulae for general Dedekind-Rademacher sums*, Acta Arithmetica **73** (1995), 389–396.

[5] W. Kohnen et D. Zagier, *Modular functions with rational periods*, dans "Modular Forms", R.A. Rankin (ed.), Ellis Horwood, Chichester (1984), 197–249.

[6] T.Q.T. Le et J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions*, Topology and its Applic. **62** (1995), 193-206.

[7] J. Lewis, *Spaces of holomorphic functions equivalent to the even Maass cusp forms*, Invent. math., à paraître.

[8] J. Lewis et D. Zagier, *Period functions and the Selberg zeta function for the modular group*, à paraître dans "The Mathematical Beauty of Physics", Advanced Series in Mathematical Physics **24**, World Scientific.

[9] J. Lewis et D. Zagier, *Period functions for Maass wave forms*, en préparation.

[10] R. Morelli, *Pick's theorem and the Todd class of a toric variety*, Adv. in Math. **100** (1993), 183–231.

[11] S. Robins, *The Ehrhart polynomial of a lattice polytope*, preprint, 1995.

[12] D. Solomon, *Algebraic properties of Shintani's generating functions: Dedekind sums and cocycles on $PGL_2(\mathbb{Q})$*, preprint, 1995.

[13] D. Zagier, *Periods of modular forms and Jacobi theta functions*, Invent. math. **104** (1991), 449–465.

[14] D. Zagier, *Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values*, dans "Hokei-keishiki to L-kansuu no kenkyuu" (Conférence sur les formes automorphes et les fonctions L), RIMS Kokyuroku **843** (1993), 162–170.

[15] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, dans "First European Congress of Mathematics", Volume II, Progress in Math. **120**, Birkhäuser-Verlag, Basel, (1994), 497–512.

[16] D. Zagier, *Multiple zeta values*, en préparation.