保型形式論の話題から

九大集中講義

Don Zagier 述

（金子昌信 記）

1990/11/26 - 30

保型形式論の話題から

九大集中講義

Don Zagier 述

（金 子 昌 信　記）

1990/11/26 - 30

上記表題の講義はＺａｇｉｅｒ教授が九州大学理学部に在任期間中の平成二年十一月末の一週間に集中して行われました。
ノートから日本語稿作成の労をとられた京都工繊大学の金子昌信氏及びＴｅｘタイプをしてくださった九州大学の院生吉永正和君に感謝します。

九州大学理学部数学教室　講義録刊行会

平成四年十二月吉日

目次

Part I

保型形式の周期

1 序

以下の講義では $SL_2(\boldsymbol{Z})$ 上の modular forms に関する標準的な知識，つまり定義， Eisenstein 級数，L 関数，Hecke 作用素 等の知識は仮定する．

さて，整数論，代数幾何，保型形式 (modular forms) には多くのゼータ関数 (L 関数) がある．それらは

- オイラー積　$L(s) = \sum \frac{a_n}{n^s} = \prod_p (*)$
- 関数等式 $L(s) = *L(k-s)$
- 係数の代数的性質，$a_n \in$ 代数体
- 特殊値 $L(s_0) =$ 意味ある量
- p-adic interpolation

等々の性質を持つ，又は持つと予想されるが，modular forms の場合それらが証明される．従って，さまざまなゼータ関数を modular forms に結び付けることは非常に重要なことである．

Example I.1
$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k = \{\ \Gamma$ 上重さ k の cusp forms $\} \rightsquigarrow L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$
は上の諸性質をもつ．

ここで記号を固定する．$k > 0$: even, $\Gamma = PSL_2(\boldsymbol{Z})$，$\mathfrak{h}$: 上半平面，$M_k = \{\ \Gamma$ 上重さ k の modular forms $\}$，つまり $M_k \ni f \Leftrightarrow$

1. $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad (\tau \in \mathfrak{h},\ q = e^{2\pi i \tau})$.
2. $f\,|_k\,\gamma = f, \quad (^\forall \gamma \in \Gamma)$.

ここに $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\boldsymbol{R})$ に対し

$$f\,|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{-k} f(\gamma\tau)$$

$$\left(f\,|_k\,\gamma_1\gamma_2 = (f\,|_k\,\gamma_1)\,|_k\,\gamma_2 \right).$$

$M_k \supseteq S_k = \{\ \Gamma$ 上重さ k の cusp forms $\}$, つまり

$$f \in S_k \Longleftrightarrow f \in M_k \text{ かつ上の 1. で } a_0 = 0.$$

M_k には，Hecke 作用素 T_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が作用している．$M_k \ni f$ への T_nの作用を $f \mid T_n$で表す．

$M_k \ni f$ が Hecke form（普通 normalized Hecke eigen form と呼ばれるものを，ここではこう呼ぶ）であるとは，$f \mid T_n = \lambda_n f$, $(\forall n, \exists \lambda_n)$ かつ $a_1 = 1$ なること$\left(\Rightarrow a_n = \lambda_n,\ L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^s}\right)$．このとき $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は乗法的，つまり $(m,n) = 1$ に対し $a_m a_n = a_{mn}$ $\left(\Leftrightarrow L(f,s) = \prod_p \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{p^\nu}}{p^{\nu s}} \right)$.

M_k は Hecke form からなる basis をもつ．

Examples I.2

1. Eisenstein series $\quad G_k(\tau) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$

ここに $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{\substack{d>0 \\ d|n}} d^{k-1}$, $B_k = k$-th Bernoulli 数 : $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k.$

k	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
B_k	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	$\cdots$

$$\begin{aligned} G_2 &= -\frac{1}{24} + q + 3q^2 + 4q^3 + 7q^4 + 6q^5 + \cdots, \\ G_4 &= \frac{1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + 126q^5 + \cdots, \\ G_6 &= -\frac{1}{504} + q + 33q^2 + 244q^3 + \cdots. \end{aligned}$$

$k > 2$ ならば $G_k \in M_k$ かつ G_k は Hecke form.

$$\begin{aligned} L(G_k, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{k-1}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d|n} d^{k-1} = \sum_{d,e \geq 1} \frac{d^{k-1}}{(de)^s} \\ &= \zeta(s)\,\zeta(s-k+1). \end{aligned}$$

s	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$\zeta(s)$	$\cdots$	0	$-\frac{1}{252}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{2}$

1	2	3	4	5	6	$\cdots$
∞	$\frac{\pi^2}{6}$	$*$	$\frac{\pi^4}{90}$	$*$	$\frac{\pi^6}{945}$	$\cdots$

$$\zeta(1-k) = \begin{cases} -\frac{B_k}{k} & (k \geq 2, \text{even}), \\ 0 & (k \geq 2, \text{odd}). \end{cases}$$

従って $L(G_k, s)$ は $s = 1, 2, \cdots, k-1$ について "calculable ".

2. $k = 12$, $f = \Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = 0 + q - 24q^2 + 252q^3 - \cdots$

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$a_n(=\tau(n))$	1	-24	252	-1472	4830	$-6048 = -24 \cdot 252$	$\cdots$

$$L(\Delta, s) = \prod_p \frac{1}{1 - a_p\, p^{-s} + p^{11-2s}}.$$

$$\left(M_k \ni f : \text{Hecke form} \Longrightarrow L(f, s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{a_p}{p^s} + \frac{p^{k-1}}{p^{2s}}} \right)$$

特殊値 $L(\Delta, s_0)$, $(s_0 \in \{1, 2, \cdots, 11\})$ は 2 つの実数

$$\omega_1 = 0.021446066707\cdots, \quad \omega_2 = 0.000048277480\cdots$$

があって，次のように書ける．但し

$$L^*(\Delta, s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(\Delta, s) = L^*(\Delta, 12-s).$$

s_0	1 or 11	2 or 10	3 or 9	4 or 8	5 or 7	6
$L^*(\Delta, s_0)$	$\frac{192}{691}\omega_1$	$\frac{384}{5}\omega_2$	$\frac{16}{135}\omega_1$	$40\omega_2$	$\frac{8}{105}\omega_1$	$32\omega_2$

一般に $f \in M_k$ を Hecke form とすると，ある実数 $\omega_\pm$ ("Periods") があって $s_0 \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ に対して $L^*(f, s_0) = (\text{代数的数}) \times \omega_\pm$ $(\pm = (-1)^{s_0})$ となる．M_k を研究するのに，Fourier 係数の代わりにこれらの代数的数を用いようというのが以下の話のアイデアである．

一般の L 関数について Deligne による次の予想がある：
$L(s)$ が関数等式

$$\gamma(s)\, L(s) = w\, \gamma_1(k-s)\, L_1(k-s)$$

を満たすとする．ここに γ, γ_1 は Γ-factor $=$ (Γ 関数の積 $\times A^s$ の形), w は $|w| = 1$ なる複素数, L_1 はある L 関数 (多くの場合 $L_1 = L$). $\mathbb{Z} \ni s_0$ が special であるとは $\gamma(s_0)$, $\gamma_1(k-s_0) \neq \infty$ なることと定義する．
このとき予想は，

“s_0 が special integer $\Longrightarrow L(s_0) = ($代数的数$) \times$ period integral”.

ここで period integral の意味だが，“良い” L 関数（関数等式，Euler 積，等）はある $\overline{Q}$ 上定義された代数多様体の “motif” の L 関数であるという哲学があって，その代数多様体上のある微分形式をあるサイクル上積分したものが period integral である．

Examples I.3

1. $L(s) = \zeta(s)$: Riemann ゼータ，$\gamma(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$
関数等式は　$\gamma(s)\zeta(s) = \gamma(1-s)\zeta(1-s)$.

$$\begin{aligned} \gamma(s_0) = \infty &\iff s_0 = 0, -2, -4, \cdots \\ \gamma(1-s_0) = \infty &\iff s_0 = 1, 3, 5, \cdots \end{aligned}$$

従って special integers は $\cdots, -5, -3, -1, 2, 4, 6, \cdots$ (cf. Ex. I.2 の表).

2. $\Delta(\tau) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ に対しその L 関数を

$$L(\Delta, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \frac{1}{(1-\frac{\alpha_p}{p^s})(1-\frac{\beta_p}{p^s})}$$

とすると $\alpha_p + \beta_p = a_p$, $\alpha_p\beta_p = p^{11}$. これに対し

$$\begin{aligned} L(Sym^2\Delta, s) &= \prod_p \frac{1}{(1-\frac{\alpha_p^2}{p^s})(1-\frac{\alpha_p\beta_p}{p^s})(1-\frac{\beta_p^2}{p^s})}, \\ L(Sym^3\Delta, s) &= \prod_p \frac{1}{(1-\frac{\alpha_p^3}{p^s})(1-\frac{\alpha_p^2\beta_p}{p^s})(1-\frac{\alpha_p\beta_p^2}{p^s})(1-\frac{\beta_p^3}{p^s})} \end{aligned}$$

$\cdots$ 等と定義する．

Conjecture　$L(Sym^m\Delta, s)$ は $s \mapsto 11m+1-s$ についての関数等式を満たし，special integers での特殊値は π 及び先の ω_1, ω_2 の単項式の有理数倍．

s	$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ $\times L(\Delta,s)$	s	$(2\pi)^{-2s+11}\Gamma(s)$ $\times L(Sym^2\Delta,s)$	s	$(2\pi)^{-2s+11}\Gamma(s)$ $\times L(Sym^3\Delta,s)$
6	$2^5\,\omega_2$	12	$2^{10}\,\omega_1\omega_2$	18	$2^{25}\cdot 3^2\cdot 5\,\omega_1\omega_2^3$
7	$\frac{2^3}{3\cdot5\cdot7}\,\omega_1$	14	$\frac{2^{10}}{7}\,\omega_1\omega_2$	19	$\frac{2^{21}}{3\cdot5^2\cdot7}\,\omega_1^3\omega_2^2$
8	$2^3\cdot 5\,\omega_2$	16	$\frac{2^6}{3}\,\omega_1\omega_2$	20	$2^{23}\cdot 3^2\cdot 5\,\omega_1\omega_2^3$
9	$\frac{2^4}{3^3\cdot5}\,\omega_1$	18	$\frac{2^9}{3^3\cdot5}\,\omega_1\omega_2$	21	$\frac{2^{21}}{3^2\cdot5\cdot7^2}\,\omega_1^3\omega_2$
10	$\frac{2^7\cdot3}{5}\,\omega_2$	20	$\frac{2^{10}}{5^2\cdot7^2}\,\omega_1\omega_2$	22	$\frac{2^{24}\cdot3^3\cdot5}{23}\,\omega_1\omega_2^3$
11	$\frac{2^6\cdot3}{691}\,\omega_1$	22	$\frac{2^9\cdot7}{23\cdot691}\,\omega_1\omega_2$		

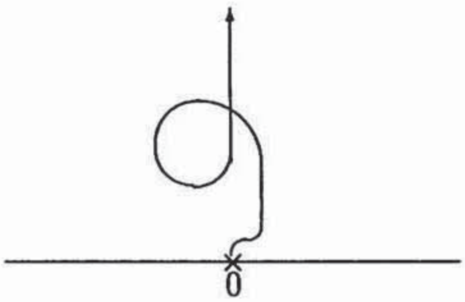
(なお，関数等式，特殊値の正確な予想については，[14]を参照のこと.)

2　周期多項式，Eichler-Shimura-Manin の定理

重さ k の cusp form $f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n\in S_k$ に対し，f の n-th period $r_n(f)$, $(n=0,1,2,\cdots,k-2)$ を

$$r_n(f):=\int_0^\infty f(\tau)\tau^n d\tau$$

で定義する.



$\mathrm{Re(s)}\gg 0$ $\left(>\frac{k}{2}+1\ でよい\right)$ のとき，f の L 関数 $L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ は絶対収束し $L^*(f,s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s)$ とおくと

$$\begin{aligned}
L^*(f,s) &= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^\infty t^{s-1}\,e^{-2\pi nt}dt\,, \qquad \left(\frac{\Gamma(s)}{c^s}=\int_0^\infty t^{s-1}\,e^{-ct}dt\right)\\
&= \int_0^\infty t^{s-1}\,f(it)dt\,.
\end{aligned}$$

最後の積分は任意の s に対し収束し，$L^*(f,s)$ は s の整関数である．又 $f(-\frac{1}{\tau}) = \tau^k f(\tau)$ より，$f(\frac{i}{t}) = (-1)^{\frac{k}{2}} t^k f(it)$．積分区間を 1 で 2 つに分けて $\int_0^1$ にこれを用いることにより，関数等式

$$L^*(f,k-s) = (-1)^{\frac{k}{2}} L^*(f,s)$$

を得る．period との関係は

$$\begin{aligned} r_n(f) &= i^{n+1}\int_0^\infty f(it)\,t^n\,dt\,, \qquad (\tau = it) \\ &= i^{n+1} L^*(f,n+1) \end{aligned}$$

で与えられる．従って，$r_0, r_1, \cdots, r_w$ (以下しばしば $k-2=w$ と書く) は $L^*(f,s_0), s_0 = 1,2,\cdots,k-1$ と対応しており，これは丁度 special integers での特殊値である (s_0 : special $\Leftrightarrow$ $\Gamma(s_0)$, $\Gamma(k-s_0) \neq \infty$ $\Leftrightarrow$ $0 < s_0 < k$)．これら $w+1$ 個の periods によって写像 $S_k \ni f \to (r_0(f), r_1(f), \cdots, r_w(f)) \in \boldsymbol{C}^{w+1}$ を得るが，このとき

Fact　この写像は単射である．

更に

Better fact　2 つの写像

$$f \longmapsto (r_0(f), r_2(f), \cdots, r_w(f))$$

及び

$$f \longmapsto (r_1(f), r_3(f), \cdots, r_{w-1}(f))$$

はともに単射で像もわかる．

これら有限個の r_n が f に関するすべての情報を含んでおり，Hecke 作用素の作用も explicit に書ける (cf. §4 Th. I.14)．

さて $r_n(f)$ をよりよく理解するために，これらの母関数 $r(f)$ を作る;

$$r(f)(X) = \sum_{n=0}^{w} (-1)^n \binom{w}{n} r_n(f)\,X^{w-n}$$

又は，斉次化して

$$r(f)(X,Y) = \sum_{n=0}^{w} (-1)^n \binom{w}{n} r_n(f)\,X^{w-n}\,Y^n.$$

$r(f)$ は

$$\begin{aligned} V_k &= \{k-2\,\text{次以下の}\,1\,\text{変数}\,X\,\text{の多項式}\} \\ &\cong \{\,2\,\text{変数}\,X,Y\,\text{の}\,k-2\,\text{次斉次多項式}\,\} \end{aligned}$$

の元であり，V_k には $GL_2(\boldsymbol{C})$ が $\varphi(X,Y) \mapsto \varphi(aX+bY, cX+dY)$ によって $\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\boldsymbol{C})\right)$ 或は，1 変数で書くと，$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\boldsymbol{C})$ に対し

$$\varphi \longmapsto \varphi|_{2-k}\, g = \varphi|g := (cX+d)^{k-2}\varphi\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \in V_k$$

によって作用している．V_k を $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ の作用による固有値 $1,-1$ の部分空間 V_k^+, V_k^- の直和（偶多項式と奇多項式の直和）$V_k = V_k^+ \oplus V_k^-$ に分解しておき

$$\begin{aligned} r^+(f) &= \sum_{n:\mathrm{even}} \binom{w}{n} r_n(f) X^{w-n} \\ r^-(f) &= -\sum_{n:\mathrm{odd}} \binom{w}{n} r_n(f) X^{w-n} \end{aligned}$$

とすると

$$r(f) = r^+(f) + r^-(f)$$

で，写像 r は $r^\pm$ を引き起こす．

$$\begin{aligned} r &: S_k \ni f \longmapsto r(f) \in V_k\,, \\ r^\pm &: S_k \ni f \longmapsto r^\pm(f) \in V_k^\pm\,. \end{aligned}$$

$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma = PSL_2(\boldsymbol{Z})$ に対する $r(f)|\gamma$ (k が偶数であるから PSL_2 の作用が well-defined) を計算しよう．$r(f)$ を r_f とも書く．定義より

$$\begin{aligned} r_f(X) &= \sum_{n=0}^{w}(-1)^n \binom{w}{n} X^{w-n} \int_0^\infty f(\tau)\tau^n d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)(\tau - X)^w d\tau\,, \qquad (w = k-2)\,. \end{aligned}$$

これに γ を作用させると

$$\begin{aligned} (r_f|\gamma)(X) &= (cX+d)^w \int_0^\infty f(\tau)\left(\tau - \frac{aX+b}{cX+d}\right)^w d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)\,(cX\tau + d\tau - aX - b)^w d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty (c\tau - a)^k f(\tau)\left(X - \frac{d\tau - b}{-c\tau + a}\right)^w \frac{d\tau}{(c\tau - \cancel{d})^2} \quad a \\
&= \int_0^\infty f(\gamma^{-1}\tau)\,(X - \gamma^{-1}\tau)^w\, d(\gamma^{-1}\tau) \\
&= \int_{\gamma^{-1}(0)}^{\gamma^{-1}(\infty)} f(\tau)\,(X-\tau)^w d\tau\,.
\end{aligned}
$$

さて，$S = \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \pm\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$
\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z}) = < S, U \,|\, S^2 = U^3 = 1 >, \qquad \left(U^2 = \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right).
$$

上の計算より

$$
\begin{aligned}
r_f|S &= \int_{S^{-1}(0)}^{S^{-1}(\infty)} f(\tau)\,(X-\tau)^w d\tau \\
&= \int_\infty^0 f(\tau)\,(X-\tau)^w d\tau = -r_f\,.
\end{aligned}
$$

故に

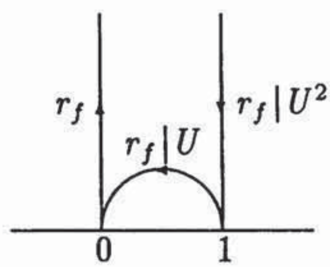
$$
r_f|S = -r_f \qquad \text{i.e. } X^w r_f\Big(-\frac{1}{X}\Big) = -r_f(X)\,.
$$

$r_n(f) = i^{n+1}L^*(f, n+1)$ であるから，これは即ち関数等式に他ならない．
次に

$$
\begin{aligned}
r_f|U &= \int_{U^{-1}(0)}^{U^{-1}(\infty)} f(\tau)\,(\tau - X)^w\, d\tau = \int_1^0 f(\tau)\,(\tau - X)^w\, d\tau \\
r_f|U^2 &= \int_\infty^1 f(\tau)\,(\tau - X)^w\, d\tau\,, \qquad \left(U : \tau \mapsto 1 - \frac{1}{\tau},\ U^2 : \tau \mapsto \frac{1}{1-\tau}\right).
\end{aligned}
$$

従って

$$
r_f + r_f|U + r_f|U^2 = 0\,.
$$



以上から

$$
r(S_k) \subset W_k = \{\varphi \in V_k\,;\ \varphi|(1+S) = \varphi|(1+U+U^2) = 0\}\,.
$$

ここで，$1+S, 1+U+U^2$ は $\mathbf{Z}[\Gamma]$ の元で，作用は Γ の作用を linear に拡張したもの．更に，$W_k^{\pm} := W_k \cap V_k^{\pm}$ と定義すると $\gamma^{\pm} : S_k \to V_k^{\pm}$ の像は $W_k^{\pm}$ に入っている ($\gamma^{\pm}$ の像が W_k に入ることを言えばよい．それには $W_k = W_k^+ \oplus W_k^-$ を言えばよい．$\varepsilon = \pm\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbf{Z})$ ($\notin \Gamma, \varepsilon^2 = 1$) とすると，

$$V_k^{\pm} = \{\varphi \in V_k \,;\, \varphi|\varepsilon = \pm\varphi\}.$$

等式

$$\varepsilon S = S\varepsilon,\ \varepsilon U = SU^2S\varepsilon,\ \varepsilon U^2 = SUS\varepsilon$$

を用いて，$\varphi \in W_k \Rightarrow \varphi|\varepsilon \in W_k$ がわかるから，$W_k = W_k^+ \oplus W_k^-$ となる)．この写像 $r^{\pm} : S_k \to W_k^{\pm}$ について次が知られている．

Theorem I.1 (Eichler-Shimura(-Manin) isomorphism)

1. $r^- : S_k \longrightarrow W_k^-$ は同型．

2. $r^+ : S_k \longrightarrow W_k^+$ は単射で，

$$W_k^+ = r^+(S_k) \oplus < P_k^+ >,\ \ P_k^+(X) = X^w - 1 \in W_k^+.$$

<u>$P_k^+ \in W_k^+$の check</u> :

$$\begin{aligned}
P_k^+|S &= X^w P_k^+\Big(-\frac{1}{X}\Big) = X^w\left(\Big(-\frac{1}{X}\Big)^w - 1\right) \\
&= 1 - X^w = -P_k^+ \\
P_k^+|U &= X^w P_k^+\Big(1-\frac{1}{X}\Big) = (X-1)^w - X^w \\
P_k^+|U^2 &= (X-1)^w P_k^+\Big(\frac{-1}{X-1}\Big) = 1-(X-1)^w \\
P_k^+ + P_k^+|U + P_k^+|U^2 &= X^w - 1 + (X-1)^w - X^w + 1 - (X-1)^w \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Examples I.4

1. $k=6$ のとき $W_6^+ \ni \varphi = a + bX^2 + cX^4$ とすると

$$\varphi|S = X^4\varphi\Big(-\frac{1}{X}\Big) = c + bX^2 + aX^4$$

より

$$\varphi|S=-\varphi \Longleftrightarrow a=-c,\ b=0 \Longleftrightarrow \varphi=c(X^4-1)=c\,P_6^+ .$$

$W_6^- \ni \varphi = dX + eX^3$ とすると

$$\varphi|S=-eX-dX^3$$

より

$$\varphi|S=-\varphi \Longleftrightarrow d=e \Longleftrightarrow \varphi=e(X^3+X) .$$

$\varphi=X+X^3$ に対し,

$$\begin{aligned}
&\varphi+\varphi|U+\varphi|U^2\\
&= X+X^3+X^4\left(1-\frac{1}{X}+\left(1-\frac{1}{X}\right)^3\right)+(X-1)^4\left(\frac{-1}{X-1}+\left(\frac{-1}{X-1}\right)^3\right)\\
&= X+X^3+X^4-X^3+X(X-1)^3-(X-1)^3-(X-1)\\
&= 2-4X+\cdots\\
&\neq 0 .
\end{aligned}$$

故に,

$$W_6^-=\{0\},\qquad W_6^+=< P_6^+ > .$$

2. $k=12$ のとき

$$W_{12}^-=< a^- >,\qquad W_{12}^+=< b^+,p^+ >$$

$$\begin{aligned}
a^-(X) &= X\,(1-X^2)^2\,(4-X^2)\,(1-4X^2)\\
&= 4X^9-25X^7+42X^5-25X^3+4X\\
b^+(X) &= X^2\,(1-X^2)^3\\
&= -X^8+3X^6-3X^4+X^2\\
p^+(X) &= X^{10}-1\\
r_\Delta^+(X) &= \left(\frac{36}{691}p^+(X)-b^+(X)\right)\cdot\omega_\Delta^+, \qquad \omega_\Delta^+=0.1143790224\cdots\times i\\
r_\Delta^-(X) &= a^-(X)\cdot\omega_\Delta^-, \qquad \omega_\Delta^-=0.0009269276\cdots
\end{aligned}$$

r_k^+ による S_k の像については単に $W_k^+=r^+(S_k)\oplus < X^{k-2}-1 >$ というだけではなく Kohnen-Zagier [9] によって厳密にわかる.

Theorem I.2

$$\sum_{\substack{n=0\\ \text{even}}}^{k-2}\binom{k-2}{n} r_n X^{k-2-n}\in r^+(S_k)\Longrightarrow \sum_{\substack{n=0\\ \text{even}}}^{k-2}\lambda_n r_n=0\,,$$

$$\left(\lambda_n=\frac{B_k}{k!}\left\{1+\binom{k-1}{n}-\binom{k-1}{n+1}\right\}+2\sum_{\substack{n<r<k\\ r:\text{even}}}\binom{r-1}{n}\frac{B_r}{r!}\frac{B_{k-r}}{(k-r)!}\right)$$

さてここで大切なことは

$$W_k^{\pm}\text{は}\boldsymbol{Q}\text{上定義されている}$$

ということである．つまり，W_k の条件は多項式の係数の間の有理係数の連立一次方程式となるから

$$W_k^{\pm}=(W_k^{\boldsymbol{Q}})^{\pm}\otimes\boldsymbol{C},\quad W_k^{\boldsymbol{Q}}=W_k\cap\boldsymbol{Q}[X]$$

となる．そして，Hecke form については，ある定数倍が period map $r^{\pm}$ によって $(W_k^{\boldsymbol{Q}})^{\pm}\otimes\boldsymbol{Q}(f)$ に入るのである．($\boldsymbol{Q}(f)=$ Fourier 係数の体) 正確には次の通り．

Theorem I.3 (Eichler-Shimura-Manin) $f\in S_k$ を Hecke form とする．$\boldsymbol{Q}(f)=f$ の Fourier 係数で生成される有限次代数体，

$$(f,f)=\int_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}}|\,f(\tau)\,|^2 v^k\frac{du\,dv}{v^2},\qquad(\tau=u+iv)$$

とする．このとき，2つの0でない定数 $\omega_f^+\in i\boldsymbol{R}$, $\omega_f^-\in\boldsymbol{R}$ が存在し，$\omega_f^+\omega_f^-/\,i(f,f)$ 及び $r_f^{\pm}(X)/\omega_f^{\pm}$ の係数が $\boldsymbol{Q}(f)$ に属す．

これは，次のようにも述べられる．

Theorem I.4 任意の $m,n\in\{0,1,\cdots,k-2\},m\not\equiv n\ (\mathrm{mod}\ 2)$ に対し

$$r_m(f)\,r_n(f)/\,i(f,f)\in\boldsymbol{Q}(f).$$

<u>Th. I.4⇒ Th. I.3</u>: 例えば $m=0$ として，すべての odd $n\in\{0,1,\cdots,k-2\}$ に対し，$r_0(f)\,r_n(f)/\,i(f,f)\in\boldsymbol{Q}(f)$ となるから，$\omega_f^-=\dfrac{i(f,f)}{r_0(f)}$ とおき，同じく $\omega_f^+=\dfrac{i(f,f)}{r_1(f)}$ とおけば，Th. I.3 が言える$\Big((f,f)\in\boldsymbol{R}$, $r_n(f)\in i^{n+1}\boldsymbol{R}$ より $\omega_f^+\in i\boldsymbol{R},\omega_f^-\in\boldsymbol{R}$ となる$\Big)$．

Th. I.3 $\Rightarrow$ Th. I.4 : 例えば m : even, n : odd とすると $\frac{r_m}{\omega_f^+}, \frac{r_n}{\omega_f^-} \in \boldsymbol{Q}(f)$, 従って $\frac{r_m r_n}{\omega_f^+ \omega_f^-} \in \boldsymbol{Q}(f)$. 一方 $\frac{\omega_f^+ \omega_f^-}{i(f,f)} \in \boldsymbol{Q}(f)$ より積をとって $\frac{r_m r_n}{i(f,f)} \in \boldsymbol{Q}(f)$.

更に Th. I.4 は次の Th. I.5 より導かれる（逆に Th. I.4 と任意の $\sigma \in Aut(\boldsymbol{C})$ に対し $\left(\frac{r_m(f)\, r_n(f)}{i(f,f)}\right)^\sigma = \frac{r_m(f^\sigma)\, r_n(f^\sigma)}{i(f^\sigma, f^\sigma)}$ となることから Th. I.5 が出る）. $a_f(\ell)$ で f の q 展開の q^ℓ の係数を表す.

Theorem I.5 f, m, n は上の通りとする.

(1)
$$\sum_{\substack{f \in S_k \\ \text{Hecke}}} \frac{r_m(f)\, r_n(f)}{i(f,f)} a_f(\ell) \in \boldsymbol{Q}, \qquad (\forall \ell \geq 1).$$

これから Th. I.4 は次のようにして導く.

m, n は固定して, $\beta(f) = r_m(f)\, r_n(f) / i(f,f)$ とおく. (1) が成り立てば, 任意の ℓ, $\sigma \in Aut(\boldsymbol{C})$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{f \in S_k \\ \text{Hecke}}} \beta(f) a_f(\ell) &= \sum_{\substack{f \in S_k \\ \text{Hecke}}} \beta(f)^\sigma a_f(\ell)^\sigma = \sum_{\substack{f \in S_k \\ \text{Hecke}}} \beta(f)^\sigma a_{f^\sigma}(\ell) \\ &= \sum_{\substack{f \in S_k \\ \text{Hecke}}} \beta(f^{\sigma^{-1}})^\sigma a_f(\ell).\end{aligned}$$

従って, q^ℓ をかけて, 足すことによって

$$\sum_{\substack{f \in S_k \\ \text{Hecke}}} \beta(f)\, f = \sum_{\substack{f \in S_k \\ \text{Hecke}}} \beta(f^{\sigma^{-1}})^\sigma f.$$

f 達の一次独立性より

$$\beta(f) = \beta(f^{\sigma^{-1}})^\sigma, \qquad (\forall f).$$

今, $\sigma|_{Q(f)} = \mathrm{id}. \Rightarrow f^{\sigma^{-1}} = f \Rightarrow \beta(f) = \beta(f)^\sigma$. よって, $\beta(f) \in \boldsymbol{Q}(f)$ となり Th. I.4 が言えた.

Example I.5 $k = 12, f = \Delta$

$$\begin{aligned} r_\Delta(X) &= \omega_\Delta^+\Big(\frac{36}{691}X^{10} - X^8 + 3X^6 - 3X^4 + X^2 - \frac{36}{691}\Big) \\ &\quad + \omega_\Delta^-(4X^9 - 25X^7 + 42X^5 - 25X^3 + 4X)\end{aligned}$$

$m=1, n=2$ のとき

$$r_1(\Delta) = -\frac{2}{5}\omega_\Delta^-, \quad r_2(\Delta) = -\frac{1}{45}\omega_\Delta^+, \quad \omega_\Delta^+\omega_\Delta^- = 2^{10}\cdot i(\Delta,\Delta)$$

$$\Longrightarrow \frac{r_1(\Delta)\, r_2(\Delta)}{i(\Delta,\Delta)} a_\Delta(3) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{45}\cdot 2^{10} \in \boldsymbol{Q}$$

$S_k \ni f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ に対する周期多項式 $r_f(X) = \int_0^\infty f(z)\,(z-X)^{k-2}dz$ は次のようにも定義できる．今 $F(z) := (k-2)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{k-1}}q^n$ とおくと

$$\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}\right)^{k-1} F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = f(z), \qquad \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz} = q\frac{d}{dq}\right)$$

ここで帰納法により

Miracle $\displaystyle \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((cz+d)^{k-2}F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right) = (cz+d)^{-k}F^{(k-1)}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$

$\left(F^{(k-1)} = \dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}F\right.$ ，F の $k-1$ 回未満の微分の項が消える．$\Big)$

$F^{(k-1)}(z) =$（定数）$\times f(z)$ は重さ k ゆえ

$$\begin{aligned}&\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(cz+d)^{k-2}F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - F(z)\right]\\ &= (cz+d)^{-k}F^{(k-1)}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - F^{(k-1)}(z) = 0.\end{aligned}$$

これより $(F|_{2-k}\gamma)(z) - F(z)$, $\left(\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\right)$ は z の高々 $k-2$ 次の多項式であることがわかる．この多項式を q_γ と書く：$q_\gamma = F|_{2-k}\gamma - F$．すると q_γ は " cocycle relation" $q_{\gamma_1\gamma_2} = q_{\gamma_1}|\gamma_2 + q_{\gamma_2}$ を満たし，$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ に対しては $q_\gamma = 0$ となる．Γ は $T = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ と $S = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とで生成されるから $q_T = 0$ と $q_S = r$ が cocycle q を決定する：

$$r(z) = z^{k-2}F\left(-\frac{1}{z}\right) - F(z).$$

これが $(2\pi i)^{k-1}\gamma_f(z)$ に等しい．実際，$\dfrac{1}{(k-2)!}\left(\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1}F(z)=f(z)$ より

$$F(z)=-(2\pi i)^{k-1}\int_z^\infty f(z')(z'-z)^{k-2}dz', \qquad (k:\mathrm{even}).$$

$z\longrightarrow -\frac{1}{z}$ として

$$\begin{aligned} z^{k-2}F\left(-\frac{1}{z}\right) &= -(2\pi i)^{k-1}z^{k-2}\int_{-\frac{1}{z}}^\infty f(z')\left(z'+\frac{1}{z}\right)^{k-2}dz' \\ &= -(2\pi i)^{k-1}\int_{-\frac{1}{z}}^\infty f(z')(1+z'z)^{k-2}dz' \\ &\overset{z'\to -\frac{1}{z'}}{=} (2\pi i)^{k-1}\int_0^z f(-\frac{1}{z'})\left(1-\frac{z}{z'}\right)^{k-2}\frac{dz'}{z'^2} \\ &= (2\pi i)^{k-1}\int_0^z f(z')(z'-z)^{k-2}dz'. \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} z^{k-2}F\left(-\frac{1}{z}\right)-F(z) &= (2\pi i)^{k-1}\int_0^\infty f(z')(z'-z)^{k-2}dz' \\ &= (2\pi i)^{k-1}r_f(z). \end{aligned}$$

3 テータ関数と周期の公式，主定理

さて，(1) の左辺を整数 $2^{k-3}i^{k-4}(k-2)!$ で割ったものを $c^0_{k,\ell,m,n}$ とおく：

$$c^0_{k,\ell,m,n}:=\frac{1}{(2i)^{k-3}(k-2)!}\sum_{\substack{f\in S_k\\ \mathrm{Hecke}}}\frac{r_m(f)\,r_n(f)}{(f,f)}a_f(\ell)$$

目標

1. $c^0_{k,\ell,m,n}\in \boldsymbol{Q}$ を証明すること (Eichler-Shimura-Manin)．

2. $c^0_{k,\ell,m,n}$ の explicit な公式を与えること．

この 2. が非常に美しい形でなされ，それによって f, $r_m(f)$, $a_f(\ell)$ に関する完全な情報が得られる．そのためのアイデアは，$c^0_{k,\ell,m,n}$ の 4 つの添字に関する次の 4 重の母関数に注目することである．

$$\sum_{\substack{k\geq 2\\ \mathrm{even}}}\sum_{\ell=1}^\infty\sum_{\substack{m=0\\ m\not\equiv n(2)}}^{k-2}\sum_{n=0}^{k-2}(-1)^{m+n}\binom{k-2}{m}\binom{k-2}{n}c^0_{k,\ell,m,n}X^{k-2-m}Y^{k-2-n}q^\ell T^k.$$

$$(r_f(X)\,r_f(Y))^- := \frac{1}{2}(r_f(X)\,r_f(Y) - r_f(-X)\,r_f(-Y))$$

とすると，上の式は

$$\sum_{\substack{k\geq 2\\ \text{even}}} \left(\sum_{\substack{f\in S_k\\ \text{Hecke}}} \frac{f(\tau)}{(f,f)} (r_f(X) r_f(Y))^- \right) \frac{T^k}{(2i)^{k-3}\,(k-2)!}$$

となる．しかしながら，実はこれはきれいな式にはならない．S_k の代わりに M_k 全体をとることにより正しいものに到達する．

$$M_k = S_k \oplus < G_k > , \qquad (k \geq 4)\,.$$

$$G_k = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n, \quad L(G_k, s) = \zeta(s)\,\zeta(s-k+1)\,.$$

ところが周期積分，(f,f) の積分はそのままでは G_k に対し発散するから次のことが問題となる．

Problem I.1 $f \in G_k$ に対して $r_f(X)$，(f,f) を定義せよ．

まず，$r_f(X)$ を定義する．$f \in S_k$ に対し

$$r_f(X) = \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n \binom{k-2}{n} i^{n+1}\, L^*(f, n+1)\, X^{k-2-n}$$

であったが，$\displaystyle\binom{k-2}{n} = \frac{\Gamma(k-1)}{\Gamma(k-n-1)\,\Gamma(n+1)}$ は，$n < 0$ 又は $n > k-2$ のとき 0 となり，$L^*(f,s)$ は整関数 であるから

$$r_f(X) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \binom{k-2}{n} i^{n+1}\, L^*(f, n+1)\, X^{k-2-n}$$

とも書ける．$f = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} a_f(\ell)\, q^\ell \notin S_k$ ならば，$L^*(f,s)$ は $s = 0, k$ において一位の極をもち，留数はそれぞれ $-a_f(0)$，$(-1)^{\frac{k}{2}} a_f(0)$ である．よって

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to -1} \frac{\Gamma(k-1)}{\Gamma(k-n-1)\,\Gamma(n+1)}\, L^*(f, n+1) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{\Gamma(k-1)}{\Gamma(k-s)\,\Gamma(s)}\, L^*(f,s) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{a_f(0)}{k-1}. \\
&\lim_{n\to k-1} \frac{\Gamma(k-1)}{\Gamma(k-n-1)\,\Gamma(n+1)} L^*(f, n+1) \\
&= \lim_{s\to k} \frac{\Gamma(k-1)}{\Gamma(k-s)\,\Gamma(s)} L^*(f, s) \\
&= -(-1)^{\frac{k}{2}} \frac{a_f(0)}{k-1}.
\end{aligned}
$$

従って, $r_f(X)$ の $n=-1, k-1$ の項として

$$
-\left(-\frac{a_f(0)}{k-1}\right) X^{k-1} + (-1)^{k-1} i^k \left(-(-1)^{\frac{k}{2}} \frac{a_f(0)}{k-1}\right) X^{-1} = \frac{a_f(0)}{k-1} \left(\frac{1}{X} + X^{k-1}\right)
$$

を得るから

Definition I.1

$$
\begin{aligned}
r_f(X) \; := \; & \frac{a_f(0)}{k-1} \left(\frac{1}{X} + X^{k-1}\right) \\
& + \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n \binom{k-2}{n} i^{n+1} L^*(f, n+1) X^{k-2-n}.
\end{aligned}
$$

これは又, 次のように積分の形で書くこともできる (exercise).

Definition I.2

$$
\begin{aligned}
r_f(X) \; := \; & \int_{\tau_0}^{\infty} (f(\tau) - a_0)(\tau - X)^{k-2}\, d\tau + \int_0^{\tau_0} \left(f(\tau) - \frac{a_0}{\tau^k}\right)(\tau - X)^{k-2}\, d\tau \\
& + \frac{a_f(0)}{k-1} \left((X - \tau_0)^{k-1} + \frac{1}{X}\left(1 - \frac{X}{\tau_0}\right)^{k-1}\right), \qquad (\forall \tau_0 \in \mathfrak{h}).
\end{aligned}
$$

Remarks

1. $a_f(0) = 0$ のときは, もとの定義に一致する.

2. Def. I.2 の右辺が τ_0 によらないことは, τ_0 で微分することにより確かめられる.

この定義により $f \longmapsto r_f(X)$ は，次の写像を与える．

$$
\begin{aligned}
r : M_k \longrightarrow \widehat{V_k} &= \bigoplus_{n=-1}^{k-1} \boldsymbol{C} X^n \\
&\cong \bigoplus_{\substack{m+n=k-2 \\ m,n \geq -1}} \boldsymbol{C}\, X^m Y^n \quad \left(= \frac{1}{XY} \times k \text{次斉次多項式} \right).
\end{aligned}
$$

$\widehat{V_k}$ には $GL_2(\boldsymbol{C})$ はもはや作用しないが，$\varphi \in \widehat{V_k}, g \in GL_2(\boldsymbol{C})$ に対し，$\varphi|g$ はある有理式として意味をもつから

$$
\widehat{W_k} := \{\varphi \in \widehat{V_k} \ ; \ \varphi|(1+S) = \varphi|(1+U+U^2) = 0\}
$$

と定義する．前と同様に，$\varphi|(1+S)$ は $\varphi + \varphi|S$ の意等．このとき

$$
r(M_k) \subset \widehat{W_k}\,.
$$

これを示すには$\left(r(S_k) \subset W_k \subset \widehat{W_k}\right.$ 及び線型性より $\left.\right)$ $r_{G_k}(X) \in \widehat{W_k}$ を言えば十分である．又 $r^{\pm}, \widehat{V_k^{\pm}}, \widehat{W_k^{\pm}}$ も先と同様に定義する．

Proposition I.6 $\quad k \geq 4$, even とする．

$$
\begin{aligned}
\mathit{1.} \quad P_k^+(X) &:= X^{k-2} - 1 \in W_k^+ \quad \subset \widehat{W_k^+}\,. \qquad (\text{前出}) \\
P_k^-(X) &:= \sum_{\substack{n=-1 \\ \text{odd}}}^{k-1} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \frac{B_{k-n-1}}{(k-n-1)!} X^n \in \widehat{W_k^-}\,. \\
\mathit{2.} \quad r_{G_k}^{\pm}(X) &= \omega_{G_k}^{\pm} \cdot P_k^{\pm}(X)\,. \\
\omega_{G_k}^- &= -\frac{1}{2}(k-2)!\,, \quad \omega_{G_k}^+ = \frac{\zeta(k-1)}{(2\pi i)^{k-1}} \omega_{G_k}^-\,.
\end{aligned}
$$

Proof. $\quad$ *1.* 例によって（index 付きの対象があれば，常に母関数を作れ！）母関数をつくる．$k = 0, 2$ に対しても同じ式で $P_k^-(X)$ を定義し；

$$
\begin{aligned}
P_0^-(X) &= B_0^2 X^{-1} = \frac{1}{X}\,, \\
P_2^+(X) &= B_0 \frac{B_2}{2} X^{-1} + \frac{B_2}{2} B_0 X = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{X} + X\right)
\end{aligned}
$$

母関数 $P(X,T)$ を

$$
P(X,T) := \sum_{\substack{k=0 \\ \text{even}}}^{\infty} P_k^-(X)\, T^{k-2}
$$

と定義すると

$$
\begin{aligned}
P(X,T) &= \sum_{\substack{k=0\\ \text{even}}}^{\infty} \sum_{\substack{n=-1\\ \text{odd}}}^{k-1} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} \frac{B_{k-n-1}}{(k-n-1)!} X^n T^{k-2} \\
&\overset{n+1\to p}{=} \sum_{\substack{k=0\\ \text{even}}}^{\infty} \sum_{\substack{p=0\\ \text{even}}}^{k} \frac{B_p}{p!} \frac{B_{k-p}}{(k-p)!} X^{p-1} T^{k-2} \\
&\overset{k-p\to q}{=} \sum_{\substack{p=0\\ \text{even}}}^{\infty} \sum_{\substack{q=0\\ \text{even}}}^{\infty} \frac{B_p}{p!} \frac{B_q}{q!} X^{p-1} T^{p+q-2} \\
&= \left(\sum_{\substack{p=0\\ \text{even}}}^{\infty} \frac{B_p}{p!} (XT)^{p-1} \right) \left(\sum_{\substack{q=0\\ \text{even}}}^{\infty} \frac{B_q}{q!} T^{q-1} \right).
\end{aligned}
$$

ところで

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{n=0\\ \text{even}}}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^{n-1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^{-x}-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{e^x+1}{e^x-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \coth \frac{x}{2}.
\end{aligned}
$$

故に

$$
P(X,Y) = \frac{1}{4} \coth \frac{XT}{2} \coth \frac{T}{2}.
$$

$P_k^- |(1+S)$ は

$$
\begin{aligned}
&P(X,T) + P\left(-\frac{1}{X}, XT\right) \\
&\quad = \frac{1}{4} \left(\coth \frac{XT}{2} \coth \frac{T}{2} + \coth \frac{-T}{2} \coth \frac{XT}{2} \right) = 0
\end{aligned}
$$

の T^{k-2} の係数であるから 0 である（coth は奇関数）．一方 coth の加法公式 $\coth(x+y) = \dfrac{1+\coth x \coth y}{\coth x + \coth y}$ を対称的な形に直すと，

$$
\begin{aligned}
&\alpha + \beta + \gamma = 0 \\
&\quad \Longrightarrow \coth\alpha \coth\beta + \coth\beta \coth\gamma + \coth\gamma \coth\alpha = -1.
\end{aligned}
$$

これを用いると，

$$
P(X,T) + P\left(\frac{X-1}{X}, XT\right) + P\left(\frac{-1}{X-1}, (X-1)T\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\Big(\coth\frac{XT}{2}\coth\frac{T}{2}+\coth\frac{(X-1)T}{2}\coth\frac{XT}{2} \\
&\qquad +\coth\Big(-\frac{T}{2}\Big)\coth\frac{(X-1)T}{2}\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\Big(\coth\Big(-\frac{XT}{2}\Big)\coth\frac{T}{2}+\coth\frac{(X-1)T}{2}\coth\Big(-\frac{XT}{2}\Big) \\
&\qquad +\coth\frac{T}{2}\coth\frac{(X-1)T}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{4}, \qquad \Big(\alpha=-\frac{XT}{2}, \beta=\frac{T}{2}, \gamma=\frac{(X-1)T}{2}\Big).
\end{aligned}
$$

$P(X,T)+P\Big(\dfrac{X-1}{X},XT\Big)+P\Big(\dfrac{-1}{X-1},(X-1)T\Big)$ の T^{k-2} の係数が $P_k^-|(1+U+U^2)$ に他ならないから，これで $P_k^-|(1+U+U^2)=0$ が言えた．よって，$P_k^-\in\widehat{W_k^-}$, (k ≥ 4)．

2. $L^*(G_k,s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s-k+1)$ であるから，定義通り計算すれば得られる．　　証明終わり．

これより，$\widehat{W_k^+}=W_k^+$，$\widehat{W_k^-}=W_k^-\oplus<P_k^->$ であって

Theorem I.7 M_k に対する Eichler-Shimura 同型

$$r^{\pm}: M_k \xrightarrow{\cong} \widehat{W_k^{\pm}}$$

が得られる．

次に内積 (G_k,G_k) の定義であるが，ここでは天下り的に次のように定義する．

$$(G_k,G_k):=\frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}}\frac{B_k}{2k}\zeta(k-1).$$

これが非常に自然な定義であることは，新谷記念号の論文 [16] を参照のこと．そこで，先の母関数を M_k にまで広げたもの $C(X,Y;\tau;T)$ (X,Y は多項式の変数, $\tau\in\mathfrak{h}$, T は巾級数の変数) を

$$C(X,Y;\tau;T)=\sum_{\substack{k=0\\ \text{even}}}^{\infty}c_k(X,Y;\tau)\,T^k,$$

但し

$$
\begin{aligned}
c_0(X,Y;\tau) &= \frac{(XY-1)(X+Y)}{X^2Y^2}, \\
c_2(X,Y;\tau) &\equiv 0,
\end{aligned}
$$

$k \geq 4$, even に対し

$$c_k(X,Y;\tau) = \sum_{\substack{f \in M_k \\ \text{Hecke}}} \frac{(r_f(X)\, r_f(Y))^-}{(2i)^{k-3}\,(k-2)!\,(f,f)}\, f(\tau)$$

で定義する．このとき我々の主定理は

Theorem I.8 (Main Theorem)

$$C(X,Y;\tau;T) = \theta'(0)^2\, \frac{\theta((X+Y)T)\,\theta((XY-1)T)\,T^2}{\theta(T)\,\theta(XT)\,\theta(YT)\,\theta(XYT)}\,.$$

ここに，$\theta(u) = \theta_\tau(u)$，($\tau \in \mathfrak{h}$ fixed) は Jacobi の Theta 関数．

$$\begin{aligned}
\theta(u) &= \sum_{n\in Z} \left(\frac{-4}{n}\right) q^{\frac{n^2}{8}} e^{\frac{nu}{2}}, \qquad (q = e^{2\pi i\tau}) \\
&= 2\left(q^{\frac{1}{8}} \sinh\frac{u}{2} - q^{\frac{9}{8}} \sinh\frac{3}{2}u + q^{\frac{25}{8}} \sinh\frac{5}{2}u - \cdots\right) \\
&= q^{\frac{1}{8}}\,(e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1-q^n e^u)\,(1-q^n e^{-u})
\end{aligned}$$

(Jacobi triple product identity)

$$\begin{aligned}
\theta'(0) &= q^{\frac{1}{8}} - 3q^{\frac{9}{8}} + 5q^{\frac{25}{8}} - \cdots \\
&= q^{\frac{1}{8}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3 = \eta(\tau)^3 = \sqrt[8]{\Delta(\tau)}\,.
\end{aligned}$$

等式

$$\theta(u) = u\,\theta'(0)\,\exp\left[-2\sum_{\substack{k=2 \\ \text{even}}}^{\infty} \frac{G_k(\tau)}{k!}\, u^k\right]$$

$\left(\dfrac{\theta(u)}{u\theta'(0)} = \dfrac{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}}{u} \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n e^u}{1-q^n}\,\frac{1-q^n e^{-u}}{1-q^n}\right.$ の $\dfrac{d}{du}\log$ を計算することで確かめられる $\Big)$ を用いて Th. I.8 を次のように書き直すこともできる．

Theorem I.9 (Main Theorem 2nd version)

$$\begin{aligned}
&C(X,Y;\tau;T) \\
&= \frac{(X+Y)\,(XY-1)}{X^2Y^2} \\
&\quad \times \exp\left[2\sum_{\substack{k\geq 2 \\ \text{even}}} \{(X^k+1)(Y^k+1) - (X+Y)^k - (XY-1)^k\}\, G_k(\tau)\, \frac{T^k}{k!}\right].
\end{aligned}$$

Remark $G_k(\tau)$ にかかる $(X^k+1)(Y^k+1)-(X+Y)^k-(XY-1)^k$ は $k=2$ のとき (G_2 は modular form でない) 0 になる．実際

$$\frac{\theta((X+Y)T)\,\theta((XY-1)T)}{\theta(T)\,\theta(XT)\,\theta(YT)\,\theta(XYT)}$$

という式は

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta(u_1+u_2)\,\theta(u_3+u_4)}{\theta(u_1)\,\theta(u_2)\,\theta(u_3)\,\theta(u_4)} \\
&\quad = \frac{(u_1+u_2)\,(u_3+u_4)}{u_1\,u_2\,u_3\,u_4\,\theta'(0)} \\
&\qquad \times \exp\left[-2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{G_k(\tau)}{k!}\{(u_1+u_2)^k+(u_3+u_4)^k-u_1^k-u_2^k-u_3^k-u_4^k\}\right]
\end{aligned}$$

において $(u_1+u_2)^2+(u_3+u_4)^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2=2(u_1u_2+u_3u_4)^2$ が 0 となる最も簡単な形である．なぜなら u_i のうち 3 つまでは自由にとれるから $u_1=T$, $u_3=XT$, $u_4=YT$ とおくことができ，このとき $u_2=-XYT$ となる $(\theta(-u)=-\theta(u))$．

$\theta(u)$ や $G_k(\tau)$ は u,q の巾級数として $\boldsymbol{Q}$ 係数であるから，定理のどちらの version からでも Th. I.5 がすべての Hecke form f と $0\le m,n\le k-2$, $m\not\equiv n \pmod 2$ なるすべての m,n の対して成り立つことが見てとれる．

4 主定理の証明

Th. I.8, Th. I.9 の右辺の式を $B(X,Y;\tau;T)$ とおく：

$$\begin{aligned}
&B(X,Y;\tau;T) \\
&\quad = \theta'(0)^2\,\frac{\theta((X+Y)T)\,\theta((XY-1)T)}{\theta(T)\,\theta(XT)\,\theta(YT)\,\theta(XYT)}\,T^2 \\
&\quad = \frac{(X+Y)(XY-1)}{X^2\,Y^2} \\
&\qquad \times \exp\left[2\sum_{\substack{k\ge 2\\ \text{even}}}\{(X^k+1)(Y^k+1)-(X+Y)^k-(XY-1)^k\}\,G_k(\tau)\,\frac{T^k}{k!}\right]
\end{aligned}$$

目標は $C(X,Y;\tau;T)=B(X,Y;\tau;T)$ を示すことであるが，その前に $B(X,Y;\tau;T)$ ついて a priori にわかることについて注意しておく．2 番

目の表示からすぐ見てとれるように

$$B\left(X,Y;\frac{a\tau+b}{c\tau+d};\frac{T}{c\tau+d}\right)=B(X,Y;\tau;T)$$

$\left(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbf{Z}),\ G_2(\tau)\text{ の項が消えていることに注意}\right)$．従って

$$B(X,Y;\tau;T)=\sum_{\substack{k=0\\ \text{even}}}^{\infty}b_k(X,Y;\tau)\,T^k$$

$\left(b_0(X,Y;\tau)=\dfrac{(X+Y)(XY-1)}{X^2Y^2}\right)$ と書いたとき ($B(X,Y;\tau;T)$ は T について even である：$B(X,Y;\tau;-T)=B(X,Y;\tau;T)$)，$b_k(X,Y;\tau)$ は τ について，重さ k の modular form. 但し，係数は $\bigoplus\limits_{-1\le i,j\le k-1}\mathbf{C}X^iY^j$ に入っており，X,Y について対称で ($B(X,Y;\tau;T)=B(Y,X;\tau;T)$)，$m\not\equiv n \pmod 2$ なる X^mY^n の和である ($B(-X,-Y;\tau;X)=-B(X,Y;\tau;T)$)．しかも period relation を満たす．つまり

$$B(X,Y;\tau;T)+B\left(-\frac{1}{X},Y;\tau;XT\right)\frac{1}{X^2}=0 \tag{2}$$

及び

$$\begin{aligned}B(X,Y;\tau;T)&+B\left(1-\frac{1}{X},Y;\tau;XT\right)\frac{1}{X^2}\\&+B\left(-\frac{1}{X-1},Y;\tau;(X-1)T\right)\frac{1}{(X-1)^2}=0.\end{aligned} \tag{3}$$

(2) は定義より直ちに従う．(3) は次と同値になる．

Proposition I.10 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\in \mathbf{C}$，添字は mod 3 で考えるとする．$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$ ならば

$$\sum_{i \bmod 3}\theta(\alpha_i)\,\theta(\beta_i)\,\theta(\alpha_{i-1}+\beta_{i+1})\,\theta(\alpha_{i+1}-\beta_{i-1})=0\,.$$

実際

(3) の左辺

$$\begin{aligned}=\ &\frac{\theta'(0)^2\,T^2}{\theta(T)\,\theta(XT)\,\theta(YT)\,\theta(XYT)\,\theta((X-1)T)\,\theta((X-1)YT)}\\&\times\Big\{\theta(T)\,\theta(YT)\,\theta(((X-1)Y-X)T)\,\theta((X-1+XY)T)\\&\quad+\theta((X-1)T)\,\theta((X-1)YT)\,\theta((1-XY)T)\,\theta((-X-Y)T)\\&\quad+\theta(-XT)\,\theta(-XYT)\,\theta((X-1+Y)T)\,\theta((1-(X-1)Y)T)\Big\}\end{aligned}$$

となるから $\alpha_1 = T$, $\alpha_2 = (X-1)T$, $\alpha_3 = -XT$, $\beta_1 = YT$, $\beta_2 = (X-1)YT$, $\beta_3 = -XYT$ とすればよい.

Prop. I.10 の証明: 4 つの Theta 関数 $\theta(u) = \theta_{11}(u), \theta_{00}(u), \theta_{01}(u), \theta_{10}(u)$ に関する Riemann の関係式 (cf. Mumford [12] p.18 (R_5) 式. 但し, 我々の $\theta(u)$ は Mumford の$-i\,\theta_{11}\left(\dfrac{u}{2\pi i}, \tau\right)$ に注意. 他の Theta もこれに準じて modify)

$$\theta\left(\frac{x+y+u+v}{2}\right)\theta\left(\frac{x+y-u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y+u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y-u+v}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j\in\{0,1\}}(-1)^{i+j}\,\theta_{ij}(x)\,\theta_{ij}(y)\,\theta_{ij}(u)\,\theta_{ij}(v)$$

において, $v \to -v$ として差をとる. $\theta = \theta_{11}$ のみ奇関数で, 他は偶関数であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
&\theta\left(\frac{x+y+u+v}{2}\right)\theta\left(\frac{x+y-u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y+u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y-u+v}{2}\right)\\
&-\theta\left(\frac{x+y+u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x+y-u+v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y+u+v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y-u-v}{2}\right)\\
&= \theta(x)\,\theta(y)\,\theta(u)\,\theta(v)
\end{aligned}$$

を得る. ここで x,y,u,v は独立な変数. そこで, $x = \alpha_1$, $y = \alpha_3 + \beta_2$, $u = \beta_1$, $v = \alpha_2 - \beta_3$ とおけば $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = -\dfrac{x+y+u-v}{2}$, $\alpha_3 = \dfrac{-x+y+u-v}{2}$, $\beta_1 = u$, $\beta_2 = \dfrac{x+y-u+v}{2}$ $\beta_3 = -\dfrac{x+y+u+v}{2}$ であって

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \bmod 3}\theta(\alpha_i)\,\theta(\beta_i)\,\theta(\alpha_{i-1}+\beta_{i+1})\,\theta(\alpha_{i+1}-\beta_{i-1})\\
&= \theta(x)\,\theta(u)\,\theta(y)\,\theta(v)\\
&\quad +\theta\left(-\frac{x+y+u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x+y-u+v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y-u-v}{2}\right)\theta\left(-\frac{x-y+u+v}{2}\right)\\
&\quad +\theta\left(-\frac{x-y-u+v}{2}\right)\theta\left(-\frac{x+y+u+v}{2}\right)\theta\left(-\frac{x+y-u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y+u-v}{2}\right)\\
&= \theta(x)\,\theta(y)\,\theta(u)\,\theta(v)\\
&\quad +\theta\left(\frac{x+y+u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x+y-u+v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y-u-v}{2}\right)\theta\left(-\frac{x-y+u+v}{2}\right)\\
&\quad -\theta\left(\frac{x-y-u+v}{2}\right)\theta\left(\frac{x+y+u+v}{2}\right)\theta\left(\frac{x+y-u-v}{2}\right)\theta\left(\frac{x-y+u-v}{2}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

証明終わり.

Main Theorem の証明：

$$
\begin{aligned}
c_0(X,Y;\tau) &= b_0(X,Y;\tau) = \frac{(X+Y)(XY-1)}{X^2Y^2}, \\
c_2(X,Y;\tau) &= b_2(X,Y;\tau) = 0
\end{aligned}
$$

はよい．$c_k(X,Y;\tau), b_k(X,Y;\tau)$ を Eisenstein part $c_k^E(X,Y;\tau), b_k^E(X,Y;\tau)$ $(=(*)G_k)$ 及び cuspidal part $c_k^0(X,Y;\tau)$, $b_k^0(X,Y;\tau)$ $\left(=\sum_{f\in S_k}(*)f\right)$ に分解し，対応して次のように書く．

$$
\begin{aligned}
C(X,Y;\tau;T) &= C^E(X,Y;\tau;T) + C^0(X,Y;\tau;T), \\
B(X,Y;\tau;T) &= B^E(X,Y;\tau;T) + B^0(X,Y;\tau;T),
\end{aligned}
$$

$$(c_0^E = c_0,\ b_0^E = b_0 \text{ としておく}).$$

まず $C^E(X,Y;\tau;T) = B^E(X,Y;\tau;T)$ を証明する．そのためには cusp $\tau = i\infty$ $(q=0)$ での値が一致することをみれば十分．Prop. I.6 と (G_k, G_k) の定義から直接計算して $k>2$ のとき

$$c_k^E(X,Y;\tau) = \frac{2k}{B_k}\left(P_k^+(X)\,P_k^-(Y) + P_k^-(X)\,P_k^+(Y)\right)G_k(\tau).$$

よって

$$
\begin{aligned}
&C^E(X,Y;i\infty;T) \\
&= \frac{(X+Y)(XY-1)}{X^2Y^2} - \sum_{\substack{k=2 \\ \text{even}}}^{\infty}\left[(X^{k-2}-1)\,P_k^-(Y) + (Y^{k-2}-1)\,P_k^-(X)\right]T^k \\
&= T^2\left(P(X,T) + P(Y,T) - P(X,YT) - P(Y,XT)\right)
\end{aligned}
$$

$$\left(P(X,Y) = \sum_{\substack{k=0 \\ \text{even}}} P_k^-(X)T^{k-2} = \frac{1}{4}\coth\frac{XT}{2}\coth\frac{T}{2},\ \text{(cf. Prop. I.6 の証明)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{T^2}{4}\left(\coth\frac{XT}{2} + \coth\frac{YT}{2}\right)\left(\coth\frac{T}{2} - \coth\frac{XYT}{2}\right) \\
&= \frac{T^2\sinh\frac{(X+Y)T}{2}\sinh\frac{(XY-1)T}{2}}{4\sinh\frac{T}{2}\sinh\frac{XT}{2}\sinh\frac{YT}{2}\sinh\frac{XYT}{2}}.
\end{aligned}
$$

$\left.\dfrac{\theta(u)}{\theta'(0)}\right|_{q=0} = 2\sinh\dfrac{u}{2}$ であるから，この式は

$$B(X,Y;i\infty;T) = B^E(X,Y;i\infty;T)$$

に等しい．従って $C^E(X,Y;\tau;T) = B^E(X,Y;\tau;T)$ ．

次に cuspidal part であるが，それには，任意の Hecke form $f \in S_k$ に対し $(b_k(X,Y;\tau), f) = \dfrac{1}{(2i)^{k-3}\,(k-2)!}\cdot(r_f(X)r_f(Y))^-$ を示せばよい((,) は Petersson 内積を linear に多項式係数に拡張したものである)．なぜなら，このとき

$$b_k(X,Y;\tau) = (*)\,G_k(\tau) + \sum_{\substack{f\in S_k\\ \text{Hecke}}} \frac{(r_f(X)r_f(Y))^-}{(2i)^{k-3}\,(k-2)!\,(f,f)}\,f(\tau)$$

となり，$b_k^0(X,Y;\tau) = c_k^0(X,Y;\tau)$ ．従って $C^0(X,Y;\tau;T) = B^0(X,Y;\tau;T)$ となる．さて，この証明のために次の定理を用いる．

Theorem I.11 $F(u,v) = F_\tau(u,v) := \theta'(0)\,\dfrac{\theta(u+v)}{\theta(u)\,\theta(v)}$, $\quad(\tau \in \mathfrak{h},\, u,\, v \in C)$ とおく．このとき $F(u,v) - \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}$ の Taylor 展開係数に Eisenstein 級数の微分が現れる．正確には

$$F(u,v) = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} - 2\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s:\text{odd}}} G_{|r-s|+1}^{(\min(r,s))}(\tau)\cdot\frac{u^r}{r!}\,\frac{v^s}{s!}\,.$$

ここで $G_k^{(n)}(\tau) = \left(\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{d\tau}\right)^n G_k(\tau) = \left(q\,\dfrac{d}{dq}\right)^n G_k(\tau)$.

今これを仮定する(この定理が文献に見当たらないのが不思議である)．

$$\begin{aligned}
B(X,Y;\tau;T) &= T^2\,F(XT,YT)\,F(T,-XYT)\\
&= T^2\left(\frac{1}{XT} + \frac{1}{YT} - 2\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s:\text{odd}}} G_{|r-s|+1}^{(\min(r,s))}(\tau)\cdot\frac{X^r}{r!}\,\frac{Y^s}{s!}\,T^{r+s}\right)\\
&\qquad\times\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{XYT} - 2\sum_{\substack{p,q\geq 0\\ p+q:\text{odd}}} G_{|p-q|+1}^{(\min(p,q))}(\tau)\cdot\frac{(-XY)^q}{p!q!}\,T^{p+q}\right).
\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} b_k(X,Y;\tau) &= \text{右辺の } T^k \text{ の係数} \\ &= 4 \sum_{\substack{p,q,r,s\geq 0 \\ p+q,\, r+s:\text{odd} \\ p+q+r+s=k-2}} \frac{(-1)^q}{p!q!r!s!} G_{|r-s|+1}^{(\min(r,s))}(\tau)\, G_{|p-q|+1}^{(\min(p,q))}(\tau)\, X^{q+r}\, Y^{q+s} \\ &\quad + (\text{簡単な修正項}) . \end{aligned}$$

ここで $q+r=n$, $q+s=m$ とおくと $r+s$: odd より $m \not\equiv n \pmod 2$. $r-s=n-m$, $p-q=k-2-n-m$ であるから，例えば $n>m$, $\widetilde{m}:=k-2-m\geq n$ とするとmain termの X^nY^m の係数は，$\tilde{n}:=k-2-n$ とおくと，$\widetilde{m}-n=\tilde{n}-m$ ゆえ, 次のように計算される.

$$\begin{aligned} & 4 \sum_{\substack{q,s\geq 0 \\ q+s=m}} \frac{(-1)^q}{(\widetilde{m}-n+q)!\,q!(n-q)!\,s!} G_{n-m+1}^{(s)}(\tau)\, G_{\widetilde{m}-n+1}^{(q)}(\tau) \\ &= 4\sum_{q=0}^{m}(-1)^q \frac{1}{(\tilde{n}-m+q)!\,q!\,(n-q)!\,(m-q)!} G_{n-m+1}^{(m-q)}(\tau)\, G_{\tilde{n}-m+1}^{(q)}(\tau) \\ &= \frac{4}{n!\,\tilde{n}!} \sum_{q=0}^{m}(-1)^q \binom{n}{q}\binom{\tilde{n}}{m-q} G_{n-m+1}^{(m-q)}(\tau)\, G_{\tilde{n}-m+1}^{(q)}(\tau) \\ &= \frac{4}{n!\,\tilde{n}!} F_m(G_{n-m+1}, G_{\tilde{n}-m+1}) . \end{aligned}$$

ここに $F_m(\ ,\ )$ は H.Cohen の微分作用素で $f_1\in M_{k_1}$, $f_2\in M_{k_2}$, $\nu\in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$F_\nu(f_1,f_2) := \sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu \binom{k_1+\nu-1}{\mu}\binom{k_2+\mu-1}{\nu-\mu} f_1^{(\nu-\mu)}\, f_2^{(\mu)}$$

で定義される$\left(\text{微分は } \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{d\tau}\right)$．これは $\gamma\in\Gamma$ に対し変換則

$$F_\nu(f_1\,|_{k_1}\,\gamma, f_2\,|_{k_2}\,\gamma) = F_\nu(f_1,f_2)\,|_{k_1+k_2+2\nu}\,\gamma \tag{4}$$

を満たし，従って $F_\nu(f_1,f_2)\in M_{k_1+k_2+2\nu}$ となる（2つのmodular formsから積 $f_1f_2=F_0(f_1,f_2)$ によって新たなmodular formを作ることの一般化)．今の場合 $F_m(G_{n-m+1},G_{\tilde{n}-m+1})\in M_k$ (G_2 に対しても適当にmodifyして定義される．先の修正項と合わせて，詳しくは [15] 参照)．

$c_k^0(X,Y;\tau)$ の X^nY^m の係数は

$$\sum_{\substack{f\in S_k \\ \text{Hecke}}} (-1)^{k-2-n}\binom{k-2}{k-2-n} r_{k-2-n}(f)$$

$$\times(-1)^{k-2-m}\binom{k-2}{k-2-m} r_{k-2-m}(f)\,\frac{f(\tau)}{(2i)^{k-3}(k-2)!\,(f,f)}$$
$$= \ -\sum_{\substack{f\in S_k\\ \mathrm{Hecke}}} \frac{(k-2)!\,r_{k-2-n}(f)\,r_{k-2-m}(f)}{n!\,(k-2-n)!\,m!\,(k-2-m)!\,(2i)^{k-3}\,(f,f)}\cdot f(\tau)$$

であるから，結局示すべきは

$$\begin{aligned}
&(f, F_m(G_{n-m+1}, G_{\tilde{n}-m+1})) \\
&\quad = \ \frac{n!\,\tilde{n}!}{4}\left(-\frac{(k-2)!\,r_{k-2-n}(f)\,r_{k-2-m}(f)}{n!\,(k-2-n)!\,m!\,(k-2-m)!\,(2i)^{k-3}}\right) \\
&\quad = \ \frac{(k-2)!}{(2i)^{k-1}\,m!\,(k-2-m)!}\,r_{k-2-n}(f)\,r_{k-2-m}(f)
\end{aligned}$$

である．これは Shimura と私が別々に証明したのだが，本質的には Rankin による．しかし，彼の式は非常に複雑なもので本人も同じ式とは気付かなかったほどである．さてその証明を簡単にスケッチしよう．

一般に $g=\sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n \in M_{k_1}$, $G_{k_2}(\tau)=(*)\sum_{(c,d)=1}\frac{1}{(c\tau+d)^{k_2}}$ に対し

$$F_m(g, G_{k_2}) = (**)\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}(g^{(m)}|_k\gamma)(\tau), \quad (k=k_1+k_2+2m).$$

これは (4) において $\nu=m$, $f_1=g$, $f_2=1$ とおく．$F_m(g,1)=$（定数）$\times\, g^{(m)}$ であるから γ を $\Gamma_\infty\backslash\Gamma$ の代表を走らせて和をとれば求める式が得られる．そこで，$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n q^n\in S_k$ とすると

$$\begin{aligned}
&(f, F_m(g, G_{k_2})) \\
&\quad = \ \int_{\Gamma\backslash h} f(\tau)\,\overline{\left((**)\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}(g^{(m)}|_k\gamma)(\tau)\right)}\,v^k\frac{du\,dv}{v^2} \\
&\quad = \ (**)\int_{\Gamma_\infty\backslash h} f(\tau)\,\overline{g^{(m)}(\tau)}\,v^k\,\frac{du\,dv}{v^2} \qquad (\text{“Rankin unfolding trick”}) \\
&\quad = \ (**)\int_0^\infty\left(\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,e^{2\pi i n(u+iv)}\right)\left(\sum_{N=1}^{\infty}N^m\,\overline{b_N}\,e^{-2\pi i N(u-iv)}\right)du\right)v^{k-2}dv \\
&\quad = \ (**)\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,\overline{b_n}\,n^m\,e^{-4\pi n v}\right)v^{k-2}\,dv \\
&\quad = \ (***)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\,\overline{b_n}}{n^{k-1-m}} \\
&\quad = \ (***)L(f*g, k-1-m).
\end{aligned}$$

よって，$n-m+1+\tilde{n}-m+1+2m=k$ であるから

$$\begin{aligned}
&\Big(f, F_m(G_{n-m+1}, G_{\tilde{n}-m+1})\Big) \\
&= (***)\, L(f * G_{n-m+1}, k-1-m) \\
&= (***) \sum_{N=1}^{\infty} \frac{a_N\, \sigma_{n-m}(N)}{N^{k-1-m}} \\
&= (***) \frac{L(f,k-1-m)\, L(f,k-1-n)}{\zeta(\tilde{n}-m+1)} \\
&\qquad \Big(\text{exercise, } a_N a_M = \sum_{d|N,M} d^{k-1}\, a_{\frac{MN}{d^2}} \text{ を用いる}\Big) \\
&= (****)\, r_{k-2-m}(f)\, r_{k-2-n}(f).
\end{aligned}$$

スケッチ終わり．

<u>途中で用いた Th. I.11 の略証</u>：$F(u,v)$ を改めて

$$F(u,v) := \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\eta^{-n}}{q^{-n}\xi-1} - \frac{\xi^n \eta}{q^{-n}-\eta}\Big)$$

($\tau \in \mathfrak{h}$, $q=e^{2\pi i\tau}$, $\xi=e^u$, $\eta=e^v$, $\mathrm{Re}(u)$, $-\mathrm{Re}(v) < 2\pi \mathrm{Im}(\tau)$) で定義し直す．次の定理の *3.*, *4.* が先の Th. I.11 である．

Theorem I.12

1. $F(u,v)$ はすべての u, v について有理型に解析接続され，$u, v \in 2\pi i(\boldsymbol{Z}\tau+\boldsymbol{Z})$ で一位の極をもつ (留数は $u=2\pi i(n\tau+s)$ で η^{-n} , $v=2\pi i(m\tau+r)$ で ξ^{-m}) .

2. q についての Fourier 展開：

$$\begin{aligned}
F(u,v) &= \frac{\xi\eta-1}{(\xi-1)(\eta-1)} - \sum_{n,m\geq 1}(\xi^m\eta^n - \xi^{-m}\eta^{-n})\, q^{mn} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\coth\frac{u}{2}+\coth\frac{v}{2}\Big) - 2\sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{d|n}\sinh\Big(du+\frac{n}{d}v\Big)\Big)\, q^n.
\end{aligned}$$

3. $F(u,v) = \theta'(0)\,\dfrac{\theta(u+v)}{\theta(u)\,\theta(v)}$.

4. $F(u,v) = \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v} - 2\displaystyle\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s:\mathrm{odd}}} G^{(\min(r,s))}_{|r+s|+1}(\tau)\,\frac{u^r}{r!}\,\frac{v^s}{s!}$.

5. $F(u,v)=\dfrac{u+v}{uv}\exp\Bigg(\sum_{\substack{k>0\\ \text{even}}}\dfrac{2}{k!}\,(u^k+v^k-(u+v)^k)\,G_k(\tau)\Bigg)$.

Th.I.12 の略証：等比級数を展開することにより，Fourier 展開

$$F(u,v)=\frac{\xi\eta-1}{(\xi-1)(\eta-1)}-\sum_{m,n\geq 1}(\xi^m\eta^n-\xi^{-m}\eta^{-n})\,q^{mn}$$

を得る．これから，$F(u,v)=F(v,u)=-F(-u,-v)$ が見てとれる．解析接続は上の 2 重級数を，$n<N$ と $n\geq N$ の項にわけて，前者は m について，後者は n についての和をとり

$$\begin{aligned}F(u,v) &= \frac{\xi\eta-1}{(\xi-1)(\eta-1)}-\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{\eta^n\,\xi}{1-q^n\,\xi}-\frac{\eta^{-n}\,\xi^{-1}}{1-q^n\,\xi^{-1}}\right)q^n\\ &\quad-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\xi^m\,\eta}{1-q^m\,\eta}-\frac{\xi^{-m}\,\eta^{-1}}{1-q^m\,\eta^{-1}}\right)q^m\end{aligned}$$

とすれば，極についての情報も合わせてわかる．$N=1$ にとって，$\eta\to q\eta$ とすることにより $F(u,v+2\pi i\tau)=\xi^{-1}\,F(u,v)$ がわかるから対称性と帰納法によって

$$F(u+2\pi i\,(n\tau+s)\,,\,v+2\pi i\,(m\tau+r))=q^{-mn}\,\xi^{-m}\,\eta^{-n}\,F(u,v)$$

$(n,\,s,\,m,\,r\in\boldsymbol{Z})$ となる．これらにより $F(u,v)$ は $\dfrac{\theta(u+v)}{\theta(u)\,\theta(v)}$ と同じ極，同じ変換則をもつ (for fixed τ) ことが知れて，定数倍の違いであることがわかる．$u\to 0$ として，定数 $\theta'(0)$ が求まる．*4.* を得るには Fourier 展開を書き直した式

$$F(u,v)=\frac{1}{2}\left(\coth\frac{u}{2}+\coth\frac{v}{2}\right)-2\sum_{n\geq 1}\Bigg(\sum_{d|n}\sinh\Big(du+\frac{n}{d}v\Big)\Bigg)\,q^n$$

において $\dfrac{1}{2}\coth\dfrac{u}{2}=\displaystyle\sum_{\substack{n=0\\ \text{even}}}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\,u^{n-1}$, $\sinh(u+v)=\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ \text{odd}}}^{\infty}\frac{(u+v)^n}{n!}=\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s:\text{odd}}}\frac{u^r}{r!}\,\frac{v^s}{s!}$

を代入すればよい．*3.* ⇒ *5.* は既出の公式である．

5　Eichler-Selberg trace formula への応用

(cf.[13])

M_k は Hecke 作用素 $T_\ell\ (\ell\geq 1)$ の作用も込めて S_k と $<G_k>$ の直和であり，T_ℓ は $<G_k>$ には $\sigma_{k-1}(\ell)$ 倍として作用している．よってその

トレースについて

$$Tr(T_\ell, M_k) = Tr(T_\ell, S_k) + \sigma_{k-1}(\ell) \in \boldsymbol{Z}, \quad (k > 2).$$

今 $t_k(\ell)$ を M_k と S_k 上それぞれのトレースの平均として定義する：

$$\begin{aligned} t_k(\ell) &:= Tr(T_\ell, M_k) - \frac{1}{2}\sigma_{k-1}(\ell) \quad (k \geq 2) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(Tr(T_\ell, M_k) + Tr(T_\ell, S_k)) & (k > 2) \\ -\frac{1}{2}\sigma_1(\ell) & (k = 2). \end{cases} \end{aligned}$$

<u>普通の Trace formula</u>：ℓ を固定するとき

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k\geq 2 \\ \text{even}}} t_k(\ell) T^{k-2} &= -\frac{1}{2} \sum_{t \in Z} \frac{H(4\ell - t^2)}{1 - tT + \ell T^2} \\ &= T\text{の有理関数} \end{aligned}$$

ここに $H(n)$ ($n \equiv 0, 3 \bmod 4$) は次で定義する．

$$\begin{cases} n > 0: & H(n) = \text{“Hurwitz-Kronecker class number”} \\ & \quad \text{(= 判別式 } -n \text{ の整係数正値 2 次形式の } SL_2(\boldsymbol{Z})\text{ -同値類の個数, } X^2+XY+Y^2, \\ & \quad X^2+Y^2 \text{ の定数倍に同値な類は，それぞれ重複度 } \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2} \text{ で数える．)} \\ & \quad (n > 4 \text{ で } -n \text{ が虚 2 次体 } K \text{ の判別式であるときは } K \text{ の類数 } h(K) \text{ に等しい．)} \\ n = 0: & H(0) = -\dfrac{1}{12} \\ n < 0: & H(n) = \begin{cases} 0 & |n| \neq \text{平方} \\ -\dfrac{1}{2}u & |n| = u^2, \quad u > 0 \end{cases} \end{cases}$$

n	-9	-8	-5	-4	-1	0	3	4	7	8	11	12
$H(n)$	$-\frac{3}{2}$	0	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{4}{3}$

15	16	19	20	23	24	27	28	31	32	35
2	$\frac{3}{2}$	1	2	3	2	$\frac{4}{3}$	2	3	3	4

$H(4\ell - t^2) \neq 0$ となるのは，$|t| \leq \sqrt{4\ell}$ もしくは $4\ell - t^2 = -u^2$ つまり $\dfrac{t-u}{2} \cdot \dfrac{t+u}{2} = \ell$ となる整数 $u > 0$ の存在する場合であるから，そのような t は ℓ を固定したとき有限個であり，公式の右辺は有限和となっている．

Example I.6 $\ell = 1$．このとき $t_k(1) = \dim M_k - \dfrac{1}{2}$．

$$\sum_{\substack{k=2 \\ \text{even}}} t_k(1) T^{k-2} = \frac{-\frac{1}{4}}{1+T^2} - \frac{\frac{1}{6}}{1-T+T^2} - \frac{\frac{1}{6}}{1+T+T^2} + \frac{\frac{1}{24}}{1-2T+T^2} + \frac{\frac{1}{24}}{1+2T+T^2}.$$

これから $\dim M_k$ の周知の公式$\left(\dfrac{k}{12} + \text{ 周期 12 の補正項}\right)$が従う．

我々の主定理 Th.I.8 の応用として導かれるのは，次の形の公式である．

<u>Funny Trace Formula</u> :

$$\begin{aligned}
&-12 \sum_{\substack{k=2 \\ \text{even}}} t_k(\ell) T^{k-2} \\
&= \sum_{\substack{ad-bc=\ell \\ ad>0>bc}} \frac{\operatorname{sign}(cd)}{1-(a+d-c)T+\ell T^2} \\
&\quad + \sum_{\substack{ad=\ell \\ a,d>0}} \left\{ \sum_{|t|\leq|a|}^{*} \frac{2}{1-tT+\ell T^2} + \sum_{|t|\leq a+d}^{*} \frac{1}{1-tT+\ell T^2} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{|a+d|}{2} \left(\frac{1}{1-(a+d)T+\ell T^2} + \frac{1}{1+(a+d)T+\ell T^2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

$\sum^*$ は，end terms は重複度 $\frac{1}{2}$ で和をとる意味．

Remark 主要項の和は，ℓ-th Hecke 作用素 T_ℓ が

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}) \ ; \ ad - bc = \ell \right\}$$

に対応していることを考えると非常に自然なものであるが，分母が特性多項式 $1-(a+d)T+\ell T^2$ となってないのが不思議である．

Example I.7 $\ell=1$ の場合，右辺は主要項 $=0$ で，残りは

$$\frac{2+1}{1+T^2}+\frac{1+1}{1-T+T^2}+\frac{1+1}{1+T+T^2}+\frac{\frac{1}{2}-1}{1-2T+T^2}+\frac{\frac{1}{2}-1}{1+2T+T^2}.$$

これは確かに Ex. I.6 の右辺の -12 倍になっている．この "Funny Trace Formula" から，当然先の通常の公式が導かれねばならない．即ち

Lemma I.13 右辺の $(1-tT+\ell T^2)^{-1}$ の係数は $6\,H(4\ell-t^2)$ に等しい．

（証明略）

Example I.8 Lemma I.13 の $t=0$ の場合は次の等式（L.Mordell の本 [11] p.292）と同値．$n\in\boldsymbol{N}$ に対し

$$\sum_{\substack{x,y,z\geq 0\\ n=xy+yz+zx}}^{*} 1 = 3\,H(4n)$$

（$\sum^*$ は $xyz=0$ なる解を重複度 $\frac{1}{2}$ で数える）．例えば $n=1$ なら解は $(x,y,z)=(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ で，左辺 $=\frac{3}{2}$, 故に $H(4)=\frac{1}{2}$. $n=2$ なら $(x,y,z)=(2,1,0)$ の置換 6 通りで，左辺 $=3$, 故に $H(8)=1$, 等．

我々の公式の証明の一部として Bernoulli 数についての一連の大変奇妙な公式が必要になる（はじめは，どこか間違っていると思ったほどである）．例えば $\ell=1$ の場合

Proposition-Exercise : $n\geq 1$, odd とするとき

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n+r}{2r}\frac{B_r}{n+r}=\begin{cases}\pm\dfrac{3}{4} & n\equiv\pm 1 \pmod{12}\\[2ex] \mp\dfrac{1}{4} & n\equiv\pm 3,\pm 5 \pmod{12}.\end{cases}$$

証明の (trace formula の) 基本的アイデア : $S_k\ni f$: Hecke form とするとき，任意の $m,n\in\{0,1,\cdots,k-2\}, m\not\equiv n \pmod 2$ に対し

$$r_m(f)\,r_n(f)\in\boldsymbol{Q}(f)\cdot i(f,f)$$

であったから，$r_m(f)\,r_n(f)$ 達の $\boldsymbol{Q}$ 係数一次結合で $i(f,f)$ が書き表せると考えるのはもっともで，実際そうなっているというのが次の Haberland

[7] の結果である．$\rho_k : \boldsymbol{Q}[X,Y] \longrightarrow \boldsymbol{Q}$ を

$$\rho_k(X^mY^n) := \begin{cases} \dfrac{m!\,n!}{(k-2)!\,(m+n-k+2)!} & m+n \geq k-2, \\ & m+n:\mathrm{odd} \\ & \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する．このとき (Haberland)：

$$\rho_k(r_f(X)r_g(Y)) = 3\,(2i)^{k-1}\,(f,g)\,, \qquad (\forall f,g \in S_k)\,.$$

さて我々の Th. I.8 より

$$\sum_{\substack{f\in S_k \\ \mathrm{Hecke}}} \frac{(r_f(X)r_f(Y))^-}{(2i)^{k-3}\,(f,f)}\,a_f(\ell) = X,Y\text{の具体的な多項式}$$

であるから，両辺にρ_k を施すと

$$-12\sum_{\substack{f\in S_k \\ \mathrm{Hecke}}} a_f(\ell) = \text{ある具体的な表示}$$

となって，左辺に $tr(T_\ell, S_k)$ が出てくる．

右辺にどのようなものがでてくるかというと，上の "X,Y の具体的な多項式" の X^mY^n の係数は，($m<n$, $k-2-n$ のとき) 大ざっぱには $F_m(G_{n-m+1}, G_{k-n-m-1})$ の q^ℓ の係数であった．$F_m(G_{n-m+1}, G_{k-n-m-1}) =$ $G^{(\nu_1)}_{n-m+1}(\tau)\,G^{(\nu_2)}_{k-n-m-1}(\tau)$ $(\nu_1+\nu_2=m)$ の一次結合で

$$\begin{aligned} G^{(\nu_1)}_{k_1}(\tau) &= \left(-\frac{B_{k_1}}{2k_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k_1-1}(n)\,q^n\right)^{(\nu_1)} \\ &= \sum_{a,d\geq 1}(ad)^{\nu_1}\,d^{k_1-1}\,q^{ad} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &F_m(G_{n-m+1}, G_{k-n-m-1}) \text{ の } q^\ell \text{ の係数} \\ &= \sum_{a,d\geq 1}\sum_{b,c\geq 1}(a,b,c,d\text{ の多項式})\,q^{ad+bc} \quad \text{の } q^\ell \text{の係数} \end{aligned}$$

となり，$\ell = ad + bc$ なる a,b,c,d の多項式という形で出てくる．もう少し言うと

$$\text{Th. I.8}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{aligned}\sum_{\substack{f\in M_k\\ \text{Hecke}}} \frac{(r_f(X)r_f(Y))^-}{(2i)^{k-3}(f,f)}\, a_f(\ell) &= \sum_{\substack{ad-bc=\ell\\ ad>0>bc}} \operatorname{sign}(bd)\,(cXY+dY+aX+b)^{k-2}\\ &\quad -\frac{2}{k-1}\sum_{\substack{ad=\ell\\ a,d>0}} B^0_{k-1}(aX+dY)|_X(1-S)|_Y(1-S)\end{aligned}$$

ここで，$B^0_n(X) = B_n(X) + \frac{n}{2}X^{n-1} = \sum_{\substack{r=0\\ r\neq 1}}^{n}\binom{n}{r} B_r X^{n-r}$ (modified Bernoulli polynomial). $f|(1-S) = f(X) - X^{k-2}\, f\!\left(-\frac{1}{X}\right)$ とする．

$$\text{Th. I.8}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{aligned}\sum_{\substack{f\in M_k\\ \text{Hecke}}} \frac{(r_f(X)r_f(Y))^-}{(2i)^{k-3}(f,f)} f(\tau) &= \sum_{\substack{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in M_2(Z)\\ ad\geq 0\geq bc}} \operatorname{sign}(bd)\,(cXY+dY+aX+b)^{k-2}\, q^{ad-bc}\end{aligned}$$

(be careful if = sign). この式は Theta 級数：$\sum_{x\in Z^{2n}} P_\nu(x)\, q^{Q(x)} \in M_{n+\nu}$ ($Q: \boldsymbol{Z}^{2n} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ 2 次形式 P_ν : ν 次 spherical polynomial) として解釈される．

一般に $Q(x) = \frac{1}{2}B(x,x)$, $B(x,y)$: 双一次 のとき $Q(x_0) = 0$ となる $x_0 \in \boldsymbol{C}^{2n}$ をとれば $B(x,x_0)^\nu$ が spherical となる．今の場合

$$\begin{aligned} Q(a,b,c,d) &= Q\left(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\right) = ad - bc,\\ B(a,b,c,d;a',b',c',d') &= B\left(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right);\left(\begin{smallmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{smallmatrix}\right)\right) = ad' + a'd - bc' - b'c.\end{aligned}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{pmatrix} \text{が } Q(x_0) = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} = (\text{定数}) \cdot \begin{pmatrix} Y & -XY \\ -1 & X \end{pmatrix}.$$

このとき

$$B\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)\right)^{k-2} = (\text{定数}) \cdot (aX + dY + b + cXY)^{k-2}.$$

主定理の第2の応用として，$f \mid T_\ell$ の周期多項式を f のそれで書き表す式が得られるが，ここでは結果だけを書くにとどめる (cf. [13]).

Theorem I.14 ℓ を正整数，$f \in S_k$ とするとき

$$r_{f|T_\ell}(X) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} (cX + d)^{k-2}\, r_f\left(\frac{aX + b}{cX + d}\right).$$

ここで和は行列式が ℓ の行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ で

$$\begin{aligned} & a > |c|, d > |b|, bc \le 0, b = 0 \\ \Longrightarrow\ & -\frac{a}{2} < c \le \frac{a}{2}, c = 0 \Longrightarrow \frac{d}{2} < b \le \frac{d}{2} \end{aligned}$$

を満たすもの全体を動く．

これは，Manin [10] の 0-th period $r_0(f \mid T_\ell)$ に対する結果の一般化である．

6　実2次体との関係 (cf.[9])

$k \ge 2$ を自然数とする．この節と次の節ではこれまでの k を $2k$ にかえる．$D > 0$ を実2次体の判別式とし

$$f_D(\tau) := \frac{D^{k-\frac{1}{2}}}{\pi\binom{2k-2}{k-1}} \frac{1}{2} \sum_{\substack{A,B,C \in \mathbb{Z} \\ B^2 - 4AC = D}} \frac{1}{(A\tau^2 + B\tau + C)^k} \qquad (\tau \in \mathfrak{h})$$

と定義すると $f_D(\tau)$ は S_{2k} に属する．これの even period が次のように計算される．

Theorem I.15

$$r^+_{f_D}(X) = \sum_{\substack{A,B,C\in Z \\ B^2-4AC=D \\ C>0>A}} (AX^2+BX+C)^{k-1} - \frac{k}{B_{2k}}\zeta_{Q(\sqrt{D})}(1-k)(X^{2k-2}-1).$$

$\zeta_{Q(\sqrt{D})}(s)$ は $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の Dedekind zeta 関数である．右辺第 1 項の多項式が W_k^+ に属することは初等的に確かめることができる．

今もし $\varphi \in W_k^+$ で $\varphi + c(X^{k-2}-1) = r^+$ (cusp form) であれば Th. I.2 の関係式から，c が φ の係数の具体的な 1 次結合として書けることになる．Th. I.15 はまさにこうなっているのであって

Corollary I.16 Explicit formula

$$\zeta_{Q(\sqrt{D})}(1-k) = \sum_{\substack{B^2-4AC=D \\ A<0<C}} (\text{Explicit polynomial in } A,B,C).$$

Example I.9

$$\zeta_{Q(\sqrt{D})}(-5) = \sum_{\substack{|B|<\sqrt{D} \\ B\equiv D(2)}} \left\{\frac{691}{16380}\sigma_5\left(\frac{D-B^2}{4}\right) + \frac{45}{365}(9B^2-D)\,\sigma_3\left(\frac{D-B^2}{4}\right)\right\}.$$

これらのことはより一般に判別式 D の 2 次形式の 1 つのΓ-同値類に対して行うことができる．これを以下に述べよう．

$A,B,C \in \boldsymbol{Z}$, $(A,B,C) = 1$ に対し $Q = [A,B,C]$ で 2 次形式 $Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ を表し，$D(Q) = D = B^2 - 4AC$ とする．Γ の作用 $\left(\Gamma \ni \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ Q \longmapsto Q\circ\gamma = A(ax+by)^2 + B(ax+by)(cx+dy) + C(cx+dy)^2\right)$ によって $D = D(Q)$ なる上記 Q の集合は $h(D)$ 個の（狭義）同値類に分かれる．1 つの同値類を記号 $\mathcal{A}$ で表し，又 $Q \in \mathcal{A}$ に対する $-Q$ 全体で作られる類を $\mathcal{A}^*$ と書く．以下 $D > 0$ で平方数ではないとする．

Definition I.3 $Q = [A,B,C]$ が **reduced** とは $A,C>0$ かつ $A+C<B$ なることである．又 Q が **simple** とは $C<0<A$ なることである．

このとき次の 1 対 1 対応が成り立つ.

$$\begin{array}{rcl} \{\text{reduced}\} & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{simple かつ } A+B+C>0\} \\ (A,B,C) & \longmapsto & (A, B-2A, C-B+A) \\ \left(\dfrac{B+\sqrt{D}}{2A}\right. & \longmapsto & \left.\dfrac{B+\sqrt{D}}{2A}-1\right) \end{array}$$

各 Γ-同値類 $\mathcal{A}$ に対し V_{2k} の元 $P_{k,\mathcal{A}}$, $Q_{k,\mathcal{A}}$ 及び $R_{k,\mathcal{A}}$ を

$$\begin{aligned} P_{k,\mathcal{A}}(X) &:= \sum_{\substack{Q\in\mathcal{A} \\ Q:\text{simple}}} Q(X,-1)^{k-1}, \\ Q_{k,\mathcal{A}}(X) &:= \sum_{\substack{Q\in\mathcal{A} \\ Q:\text{reduced}}} Q(X,-1)^{k-1}, \\ R_{k,\mathcal{A}}(X) &:= P_{k,\mathcal{A}}(X) + (-1)^k P_{k,\mathcal{A}^*}(X) \end{aligned}$$

で定義する. このとき上で述べた reduced と simple の対応を使うと

$$\begin{aligned} R_{k,\mathcal{A}} &= P_{k,\mathcal{A}}|_{2-2k}(1-S) \\ &= (Q_{k,\mathcal{A}} + (-1)^k Q_{k,\mathcal{A}^*})|_{2-2k}(-U+U^2) \end{aligned}$$

となることがわかり, 従って $R_{k,\mathcal{A}}$ は $\ker(1+S)\cap\ker(1+U+U^2) = W_{2k}$ に属する. そして多項式

$$R^0_{k,\mathcal{A}} = R_{k,\mathcal{A}} - \frac{\zeta_{\mathcal{A}}(1-k)}{\zeta(1-2k)}(X^{2k-2}-1)$$

の even 及び odd part が, 先の f_D で和を類 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$ に限って定義される cusp form の周期多項式の even 及び odd part となっていることが示される ($\zeta_{\mathcal{A}}(s)$ はイデアル類 $\mathcal{A}$ に対応する partial zeta).

従って, 同様に Th. I.2 より $\zeta_{\mathcal{A}}(1-k)$ の閉じた公式が類 $\mathcal{A}$ 及び $\mathcal{A}^*$ の中の reduced (又は simple) 形式の言葉で書き表されることになる.

7 Rational Period Functions

以下で rational period functions についての YoungJu Choie との共同の仕事の主結果を簡単に述べる (cf. [2]). 記号を復習しておく. $\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$, $\Gamma \ni T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 位数 ∞, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 位数 2,

$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 位数 3. $V_{2k} = \{$ $2k-2$ 次以下の 1 変数 ($\boldsymbol{C}$ 上) 多項式 $\}$.

V_{2k} には Γ 及び $\boldsymbol{Z}[\Gamma]$ が作用していた; $\varphi|_{2-2k}\gamma = (cX+d)^{2k-2}\,\varphi\Big(\dfrac{aX+b}{cX+d}\Big)$, $\varphi(X) \in V_{2k}$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $V_{2k} \supset W_{2k} = \{\varphi\ ;\ \varphi\,|\,(1+S) = \varphi\,|\,(1+U+U^2) = 0\}$.

ここで W_{2k} とコホモロジー群 $H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, V_{2k})$ との対応を述べておく. 但し

$$\begin{aligned} H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, V_{2k}) &= \frac{\{\text{cocycles}\}}{\{\text{coboundaries}\}}, \\ \{\text{cocycles}\} &= \{\varphi : \Gamma \ni \gamma \mapsto \varphi_\gamma \in V_{2k}\ ;\ \varphi_{\gamma_1\gamma_2} = \varphi_{\gamma_1}|\gamma_2 + \varphi_{\gamma_2},\ \varphi_T = 0\}, \\ \{\text{coboundaries}\} &= \{\varphi \in \{\text{cocycles}\}\ ;\ \exists\xi \in V_{2k},\ \varphi_\gamma = \xi|\gamma - \xi,\ \forall\gamma \in \Gamma\}. \end{aligned}$$

H^1_{par} の下つき par は parabolic element に対して 0 , つまり $\varphi_T = 0$ ($\Rightarrow \varphi_{T^n} = 0,\ (\forall n)$) という条件を表す. さて cocycle φ は, その生成元での値で一意的に決まる. Γ は S, T で生成され, $\varphi_T = 0$ であるから $\varphi_S = q \in V_k$ によって φ は決まる. ところで $S^2 = U^3 = 1$ より

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{S^2} = \varphi_S|S + \varphi_S = \varphi_S|(1+S), \\ 0 &= \varphi_{U^3} = \varphi_U|(1+U+U^2), \\ \varphi_U &= \varphi_{TS} = \varphi_T|S + \varphi_S = \varphi_S \end{aligned}$$

であるから, 結局 q は $q|(1+S) = 0,\ q|(1+U+U^2) = 0$ を満たさなければならない. 即ち $q \in W_{2k}$. 又, 逆に Γ の基本関係が $S^2 = U^3 = 1$ であることから, 任意の $q \in W_{2k}$ に対し $\varphi_T = 0,\ \varphi_S = q$ によって cocycle φ が定まる. 今 φ が coboundary, つまり $\xi \in V_{2k}$ があって $\varphi_\gamma = \xi|\gamma - \xi$, ($\forall\gamma \in \Gamma$) とする. $\varphi_T = 0$ より $\xi|T = \xi$, 即ち $\xi(X+1) = \xi(X)$. これより ξ は定数 $c \in \boldsymbol{C}$ でなければならない. このとき

$$\varphi_S = c|S - c = c\,(X^{2k-2} - 1) = c\,P^+_{2k} \in W_{2k}.$$

従って, φ と φ_S の対応によって

$$H^1_{\mathrm{par}}(\Gamma, V_{2k}) \cong W_{2k} / < P^+_{2k} > \cong S_{2k} \oplus S_{2k}.$$

さてここで, 重さ $2-2k$ のかわりに重さ $2k$ を考える (cf. Serre duality $2k \longleftrightarrow 2-2k$) . M.Knopp [8] は有理関数 $q(X)$ で $q\,|_{2k}(1+S) = q\,|$

${}_{2k}(1+U+U^2)=0$ なるもの，即ち

$$\begin{cases} q(X)+X^{-2k}\,q(-\frac{1}{X})=0\,, \\ q(X)+X^{-2k}\,q(1-\frac{1}{X})+(X-1)^{-2k}\,q(-\frac{1}{X-1})=0 \end{cases}$$

なるものを考えた．

Problem I.2 そのような "rational" period function (RPF，それら全体の空間を RPF_k とかく）をすべて分類せよ．

Knopp が見出した例として自明な $X^{-2k}-1$ のほかに

$$q(X)=\frac{1}{(X^2-X-1)^k}+\frac{1}{(X^2+X-1)^k}\,, \qquad (k:\mathrm{odd})\,.$$

これは $X=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{5}}{2}$ に極をもっているが Knopp は "任意の RPF は 0 及び実 2 次無理数以外に極をもたない" ことを証明した．以下でこのことをより精密に示したあとで Prob. I.2 の解答を与える．

前節で 2 次形式が reduced, simple ということを定義した．2 次形式 $Q=[A,B,C]$ と $Ax^2-Bx+C=0$ の 1 つの根 $\alpha_Q=\dfrac{B+\sqrt{D}}{2A}$ $(\sqrt{D}>0)$ とは 1 対 1 に対応しており，これを α_Q の言葉で言うと，

$$\begin{aligned} Q:\mathrm{reduced} &\iff \alpha_Q>1,\ 0<\alpha'_Q<1, \quad (\alpha'_Q\text{は共役}) \\ Q:\mathrm{simple} &\iff \alpha'_Q<0<\alpha_Q \end{aligned}$$

である．

$\mathcal{A}$ を判別式 D の 2 次形式の 1 つの同値類とする (D は固定している)．集合 $\{Q\in\mathcal{A}\,;\,Q:\mathrm{reduced}\}$ は有限集合で，1 つのサイクル $Q_1\to Q_2\to\cdots\to Q_r\to Q_1$, $Q_{\nu+1}=Q_\nu\circ\begin{pmatrix} n_\nu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$(\nu \bmod r)$ をなす．ここで n_ν (≥ 2) は Q_ν に対応する根 w_ν を

$$w_\nu=n_\nu-\cfrac{1}{n_{\nu+1}-\cfrac{1}{n_{\nu+2}-\cfrac{1}{\ddots}}}$$

と連分数展開したときに現われる数，つまり $[w_\nu]+1$ である．Q_ν が reduced ということから，この連分数は純周期的である (一般にはあると

ころより先が周期的となる）．$\{Q \in \mathcal{A}\,;\, Q : \text{simple}\}$ も 1 つのサイクルをなすが，これに対応する根の集合を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ と書く．つまり

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} &= \{\alpha_Q\,;\, Q \in \mathcal{A}, \alpha'_Q < 0 < \alpha_Q\} \\ &= \{w_\nu - \ell\,;\, \nu\,(\mathrm{mod}\, r),\ \ell = 1, 2, \cdots, n_\nu - 1\}\end{aligned}$$

(w_ν, n_ν は上で述べたもの，即ち reduced に対応するもの) である．

Lemma I.17 $\Phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ を

$$x \longmapsto \begin{cases} x - 1 & (x \geq 1) \\ \dfrac{x}{1 - x} & (x < 1) \end{cases}$$

によって定義する．このとき，Φ の orbit で有限集合となるものは $\{0\}$ 又は $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ である．$\mathcal{A}$ は非平方正判別式 2 次形式のある Γ-同値類であって，いずれも orbit となりうる．

さて $q \in RPF_k$, $\mathcal{S} = \{q$ の極全体 $\}$ とする．$q(X) + \dfrac{1}{X^{2k}} q(S(X)) = 0$ であるから，$\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \neq 0$ ならば $S\alpha = -\dfrac{1}{\alpha} \in \mathcal{S}$ であり

$$q(X) + \frac{1}{X^{2k}} q(U(X)) + \frac{1}{(X-1)^{2k}} q(U^2(X)) = 0$$

より $\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \neq 0, 1$ ならば $U\alpha$ 又は $U^2\alpha \in \mathcal{S}$ となる．$\mathcal{S}$ は有限集合であるから，α から出発して $S\alpha \in \mathcal{S}$, $U^{i_1}S\alpha \in \mathcal{S}$ $(i_1 \in \{1, 2\})$, $SU^{i_1}S\alpha \in \mathcal{S}$, $U^{i_2}SU^{i_1}S\alpha \in \mathcal{S}$ $(i_2 \in \{1, 2\})$ と続けるとき，どこかで同じものが出てくる．このことから α がある $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$ の fixed point であることが言える ($\Gamma = < S, U >$ であり $\cdots U^{i_2}SU^{i_1}S$ は簡約できないことに注意)．従って，RPF の極は 2 次無理数である．

Proposition I.18 $\quad \mathcal{S} \subset \boldsymbol{R}$.

Proof. $\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \notin \boldsymbol{R}$ と仮定する．$\mathcal{S} \ni US\alpha = \alpha + 1$ 又は $\mathcal{S} \ni U^2S\alpha = \dfrac{\alpha}{\alpha + 1}$ であるが，$\alpha \notin \boldsymbol{R}$ なら $\alpha + 1 \notin \boldsymbol{R}$, $\dfrac{\alpha}{\alpha+1} \notin \boldsymbol{R}$ であって，$0 < |\arg(\alpha + 1)| < |\arg(\alpha)|$, $0 < \left|\arg(\dfrac{\alpha}{\alpha+1})\right| < |\arg(\alpha)|$ となる．$\mathcal{S}$ は有限集合ゆえこれは不可能．

Proposition I.19 $\mathcal{S} - \{0\} =$ いくつかの $\mathcal{A}$ に対する $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \cup S\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ の disjoint union .

Proof. $\mathcal{S} \ni \alpha \neq 0$ をとる．必要ならば $S\alpha = -\dfrac{1}{\alpha}$ で置き換えて，$\alpha > 0$ としてよい．$\alpha_0 = \alpha, \alpha_{n+1} = \alpha_n + 1\ (= US\alpha_n)$ 又は $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n + 1}\ (= U^2S\alpha_n) \in \mathcal{S}$ によって $\mathcal{S}$ の元の列　$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\ (\alpha_n > 0)$ を得る．$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 1$ なら $\alpha_{n+1} > 1$，$\alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_n + 1}$ なら $\alpha_{n+1} < 1$ であるから

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_{n+1} - 1 & (\alpha_{n+1} > 1), \\ \dfrac{\alpha_{n+1}}{1 - \alpha_{n+1}} & (\alpha_{n+1} < 1) \end{cases}$$

である．つまり $\alpha_n = \Phi(\alpha_{n+1})$．これと Lemma I.17 より主張が言える．

判別式 D の同値類 $\mathcal{A}$ と正整数 k に対し更にこの極の様子を調べると，$RPF\ q(X)$ の任意の無理数の極 $\alpha_Q \in \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ において

$$q(x) = \frac{C_\alpha}{Q(X)^k} + (X = \alpha \text{で正則な項})$$

となって，かつ C_α はすべての $\alpha \in \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ に対し同じであることがわかる．このことから $q(X)$ は，極 0 と ∞ を除いて

$$q_{k,\mathcal{A}}(X) = \frac{(-\sqrt{D})^{k-1}}{\binom{2k-2}{k-1}} \sum_{\alpha \in \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}} \left(q_{k,\alpha}(X) - q_{k,T\alpha}(X)\right)|_{2k}(1 - S)$$

の一次結合となることが言える．ここで $q_{k,\mathcal{A}}(z)$ は $\dfrac{\alpha - \alpha'}{(z-\alpha)(z-\alpha')}$ の主要部である．従って $q(X)$ は

$$(5) \quad q(X) = \sum_{\mathcal{A}} C_{\mathcal{A}} q_{k,\mathcal{A}}(X) + C_\infty(X^{-1} + X^{-2k+1}) + C_1(1 - X^{-2k})$$

の形である．ここに和は非平方判別式 D とそれに属する類 $\mathcal{A}$ をわたる．ところがこういう形の関数がすべて RPF になるとは限らない．なぜなら $1 + U + U^2$ をほどこすと一般には $0, 1, \infty$ に新たな極が生じるからである．完全な解答は §6 で導入した $R_{k,\mathcal{A}}$ の言葉で書くことができて次のようになる．

Theorem I.20 すべての RPF はある複素定数 $C_1, C_\infty, C_{\mathcal{A}}$ (殆どすべての $C_{\mathcal{A}} = 0$) があって (5) の形に書ける．逆に，(5) の形の関数が RPF となるのは

$$\sum C_{\mathcal{A}} R_{k,\mathcal{A}}(X) + C_\infty(X^{2k-2} - 1) = 0$$

となるとき又そのときに限る．

Part II

Green functions of modular curves

8 序，主結果

X を上半平面 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}/\boldsymbol{Z}$, 又は $\mathfrak{h}/\Gamma$ のいずれかとする．但し

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{h} = \{z = x + iy \in \boldsymbol{C}\,;\, y > 0\} & : & \text{開 Riemann 面}, \\
\mathfrak{h}/\boldsymbol{Z} \cong \{0 < |q| < 1\} & : & \text{開 Riemann 面}, \\
z \overset{\cong}{\mapsto} q = e^{2\pi i z} & & \\
\mathfrak{h}/\Gamma & : & \text{閉 Riemann 面} \setminus \{\text{有限個の点}\},
\end{array}
$$

($\Gamma = PSL_2(\boldsymbol{Z})$ 又は，その指数有限部分群)．我々が以下で考えるのは X に対する Green 関数 $G^X(z,z')$, より一般にパラメーター $s \in \boldsymbol{C}$ つきの $G_s^X(z,z')$ である．特に $s = k \in \boldsymbol{N}$ の場合は整数論的に興味のある関数となる ($G^X(z,z')$ は $s = 1$ に対応している)．

X に対する Green 関数 $G = G^X(z,z')$, $(z, z' \in X)$ は次の 2 つの条件及び，無限遠での条件により特徴付けられる:

1. z, z' に関して調和; $\Delta_z G = \Delta_{z'} G = 0$,
   但し， $\Delta_z = -y^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$: hyperbolic Laplacian で $\Delta y^s = s(1-s)\,y^s$ となるように正規化したもの．

2. $X \times X \setminus$(diagonal) 上連続で

$$G^X(z,z') = \log|t_z(z')|^2 + O(1), \qquad (z \longrightarrow z').$$

   ここに t_z は z の近傍の局所変数で $t_z(z) = 0$．

もし X が閉 Riemann 面であれば，1. と 2. の条件は両立しない．というのは一般に閉 Riemann 面 X から $\boldsymbol{R}$ への関数 f が

- $X - \{z_1, \cdots, z_r\}$ 上 $\Delta f = 0$
- $z \longrightarrow z_i$ のとき $f(z) = c_i \log|t_{z_i}(z)|^2 + O(1)$, $\qquad$ (f は z_i で“留数”c_i の log-pole をもつ)

であれば $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} c_i = 0$ が成り立つ．従って，もし $G(z,z')$ が 1. と 2. を満たせば z' を固定するとき，$f(z) = G(z,z')$ は $X - \{z'\}$ 上 $\Delta f = 0$, かつ z'

で留数 1 となり上の事実に反する．であるが，仮にそのようなものが存在するとして $a,b \in X$ に対して

$$g(z) = G(z,a) - G(z,b)$$

とおく．すると g は

- $X - \{a,b\}$ 上 $\Delta g = 0$,
- a, b でそれぞれ留数 1, -1 の log-pole

である．このような g は実際存在する．より一般に $D = \sum_{i=1}^{r} n_i(z_i)$ を X 上の次数 0 の因子とすると$\left(z_1, \cdots, z_r \in X,\ n_1, \cdots, n_r \in \boldsymbol{Z}, \deg(D) = \sum_{i=1}^{r} n_i\right)$ $g_D(z) = \sum_{i=1}^{r} n_i G(z, z_i)$ は意味をもち，定数差を除き一意に決まる．つまり $X - |D| = X - \{z_1, \cdots, z_r\}$ 上で $\Delta g_D = 0$, かつ $\text{log-residue}_{z_i} g_D = n_i$, $(1 \le i \le r)$ なる関数として決まるのである．更に $p, q \in X - |D|$ に対して $g_D(p) - g_D(q)$ は定数差の任意性も打ち消されて一意に決まる．

より一般に $D' = \sum_{i=1}^{r'} n'_i(z'_i)$ を $|D| \cap |D'| = \phi$ なる次数 0 の因子とすると $< D, D' >_\infty = \sum_{i=1}^{r'} n'_i g_D(z'_i) \in \boldsymbol{R}$ が well-defined である．こうして X 上の次数 0 の因子の間の pairing ("height pairing ") が得られる．$G(z,z')$ は実際には存在しないのだが，$G(z,z')$ を $\tilde{G}(z,z') = G(z,z') + a(z) + b(z')$ という形の関数におきかえても

$$\sum_{j=1}^{r'} \sum_{i=1}^{r} n'_j n_i \tilde{G}(z'_j, z_i) = \sum_{j=1}^{r'} \sum_{i=1}^{r} n'_j n_i G(z'_j, z_i)$$

となり $< D, D' >_\infty$ は同じになることに注意する．そこで $z = z'$ でのみ log-residue 1 の特異性を持つが調和ではない $G(z,z')$ を作っておいて，$a(z)$ としてある $z = \alpha$ のみで log-residue $= -1$, $b(z')$ としてある $z' = \beta$ のみで log-residue $= -1$ なる singularity をもつ関数を選び $\tilde{G}(z,z') = G(z,z') + a(z) + b(z')$ を調和関数にし，これをもとに pairing を構成することができる．

さて我々は更に $G_s = G_s^X(z,z')$, $(s \in \boldsymbol{C}, \mathrm{Re}(s) > 1)$, 特に $s = k = (1), 2, 3, 4, \cdots$ を考える．これは

- $\Delta_z G_s = \Delta_{z'} G_s = s(1-s)G_s$,
- G_s は $z = z'$ で log-residue 1 の log-pole をもつ他は有限

で一意に定まる関数で $G_s^X(z,z') = G_s^X(z',z)$ となる．X, z, z' が $\overline{\boldsymbol{Q}}$ 上定義されているときの $s=k$ に対する $G_s^X(z,z')$ が面白い数なのである．これをはっきり言い表すのが目標である．

具体的には G^X, $(k=1)$ は次のようになる．

X	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{h}/\boldsymbol{Z} \cong \{0<\lvert q\rvert<1\}$	$\mathfrak{h}/\Gamma$
G^X	$\log\left\lvert\dfrac{z-z'}{\bar{z}-z'}\right\rvert^2$	$\log\left\lvert\dfrac{q-q'}{1-\bar{q}q'}\right\rvert^2$	??
	$z, z' \in \mathfrak{h}$	$q = e^{2\pi iz}, q' = e^{2\pi iz'}$	一般には難しい
	$(z \to \infty$ のとき $\to 0)$	$(q \to \zeta, \lvert\zeta\rvert = 1$ のとき $\to 0)$	

$\mathfrak{h}/\Gamma$ が genus 0 であるときはわかる．$\Gamma = \Gamma_1 = PSL_2(\boldsymbol{Z})$ なら

$$G^{X/\Gamma_1}(z,z') = \log|j(z) - j(z')|^2.$$

ここで $j : \mathfrak{h}/\Gamma_1 \xrightarrow{\cong} \boldsymbol{C}$ ($\mathfrak{h}/\Gamma_1 \cup \{\infty\} \xrightarrow{\cong} \mathbf{P}^1(\boldsymbol{C})$) は古典的な modular invariant ;

$$j\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = j(z), \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1\right).$$

$$j(z) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots.$$

$j(z)$ には

$$z : \text{CM point} \Longrightarrow j(z) \in \overline{\boldsymbol{Q}}$$

という良く知られた性質がある ($z \in \mathfrak{h}$ が CM point $\Leftrightarrow z = x+iy$, $(x, y^2 \in \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow [\boldsymbol{Q}(z) : \boldsymbol{Q}] = 2$, このとき z は $az^2+bz+c=0$, $a,b,c \in \boldsymbol{Z}$, $D = b^2-4ac < 0$ を満たし $a>0$ とすると $z = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x = -\dfrac{b}{2a}, y = \dfrac{\sqrt{D}}{2a}$).
従って $X = \mathfrak{h}/\Gamma_1$, $s=1$, $z \neq z'$: CM points のとき

$$G_1^X(z,z') \in \log|\overline{\boldsymbol{Q}}^\times|$$

となる．$k = 2,3,4,5,7$ のときも CM points z, z' に対して $G_k^{\mathfrak{h}/\Gamma_1}(z,z') \in \log|\overline{\boldsymbol{Q}}^\times|$ となる例（証明されたものも，予想であるものもある）をあげる．その前に虚数乗法論の基本定理を述べておく．

負整数 D で $D \equiv 0, 1 \pmod 4$ なるものを固定し

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_D &:= \{z \in \mathfrak{h}\,;\, \text{判別式 } D \text{ の 2 次方程式}/\boldsymbol{Z}\text{を満たす}\}\\ &= \{z \in \mathfrak{h}\,;\, \exists a, b, c \in \boldsymbol{Z}, a > 0, (a, b, c) = 1, b^2 - 4ac = D,\\ &\qquad az^2 + bz + c = 0\}\end{aligned}$$

とおく. $\mathfrak{z}_D$ は $\mathfrak{h}$ 内の離散部分集合で $\{\text{ CM points }\} = \bigcup_D \mathfrak{z}_D$ は稠密な部分集合. $\mathcal{F} \subset \mathfrak{h}$ をΓ_1 の $\mathfrak{h}$ への作用に関する基本領域とすると $|\mathcal{F} \cap \mathfrak{z}_D|$ は有限集合でありその個数を $h = h(D)$ と書く. $j(z)$ は Γ_1 不変であるから, z が $\mathfrak{z}_D$ を動くときの $j(z)$ 全体は有限で, $\mathcal{F} \cap \mathfrak{z}_D = \{z_1, \cdots, z_h\}$ とすると $j(z_1), \cdots, j(z_h)$ がそれら全体を与える.

Theorem II.1 (虚数乗法の基本定理) $j(z_1), \cdots, j(z_h) \in \boldsymbol{C}$ はある既約方程式

$$X^h + a_1 X^{h-1} + \cdots + a_h = 0, \qquad (a_1, \cdots, a_h \in \boldsymbol{Z})$$

の根. $\mathcal{H}_D = \boldsymbol{Q}(\sqrt{D}, j(z_i))$ は $i\,(=1, \cdots, h\,)$ に依らない $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の h 次アーベル拡大で, 特に D が虚 2 次体 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の判別式のときは$\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の Hilbert 類体である.

$D \equiv 0 \pmod 4$ のとき $z_1 = \dfrac{\sqrt{D}}{2}$, $D \equiv 1 \pmod 4$ のとき $z_1 = \dfrac{1 + \sqrt{D}}{2}$ ととれて, このとき $j(z_1) \in \boldsymbol{R}$ で, $\boldsymbol{Q}(j(z_1)) = \mathcal{H}_D^+ = \mathcal{H}_D$ の最大実部分体となる. 特に, $D = -3, -4, -7, -8, -11, -12, -16, -19, -27, -28, -43, -67, -163$ のときは $h = 1$ となり, 従って $j(z) \in \boldsymbol{Z}$ (逆に $h = 1$ なる D はこれで尽きることも知られている).

D	-3	-4	-7	-8	-11	-12	-16	-19
j	0	$2^6\,3^3$	$-3^3\,5^3$	$2^6\,5^3$	-2^{15}	$2^4\,3^3\,5^3$	$2^3\,3^3\,11^3$	$-2^{15}\,3^3$
		1728	-3375	8000				

-27	-28	-43	-67	-163
$-2^{15}\,3\,5^3$	$3^3\,5^3\,17^3$	$2^{18}\,3^3\,5^3$	$-2^{15}\,3^3\,5^3\,11^3$	$-2^{18}\,3^3\,5^3\,23^3\,29^3$

さて Green 関数の CM points での値について次が成り立つ. $k = 1$ の場合には上の虚数乗法論の帰結である.

Theorem II.2 $z_1 \in \mathfrak{Z}_{D_1}$, $z_2 \in \mathfrak{Z}_{D_2}$, $D_1 \neq D_2$ とし，$h(D_1) = h(D_2) = 1$ と仮定する．このとき $k = (1), 3, 5, 7$ に対し

$$G_k^{X/\Gamma_1}(z_1, z_2) = \frac{1}{(D_1 D_2)^{\frac{k-1}{2}}} \log(\text{有理数})^2 .$$

より一般に，$h(D_1)$, $h(D_2)$ が 1 でなくても

$$\sum_{z_1 \in \mathfrak{Z}_{D_1}/\Gamma_1} \sum_{z_2 \in \mathfrak{Z}_{D_2}/\Gamma_1} G_k^{X/\Gamma_1}(z_1, z_2) = \frac{1}{(D_1 D_2)^{\frac{k-1}{2}}} \log|\text{代数的数}|^2 .$$

Conjecture $z_1 \neq z_2$, $z_1 \in \mathfrak{Z}_{D_1}$, $z_2 \in \mathfrak{Z}_{D_2}$, $k \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$. このとき

$$G_k^{X/\Gamma_1}(z_1, z_2) = \frac{1}{(D_1 D_2)^{\frac{k-1}{2}}} \log|\alpha|^2 , \qquad (\alpha \in \mathcal{H}_{D_1} \cdot \mathcal{H}_{D_2}) .$$

Example II.1 $D_1 = -4$, $D_2 = -67$

$$G_3^{X/\Gamma_1}\left(i, \frac{1 + i\sqrt{67}}{2}\right) = \frac{1}{67} \log\left(\frac{7^{110}\, 67^{67}}{3^{174}\, 31^{82}}\right) \qquad (\text{証明済})$$

$$\begin{aligned} & G_2^{X/\Gamma_1}\left(i, \frac{1 + i\sqrt{67}}{2}\right) \\ = \; & \frac{4}{\sqrt{67}} \log\left(\frac{221 - 27\sqrt{67}}{221 + 27\sqrt{67}} \cdot \left(\frac{90 + 11\sqrt{67}}{90 - 11\sqrt{67}}\right)^2 \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{67}}{6 + \sqrt{67}}\right)^6\right) \quad (\text{予想}) \end{aligned}$$

$$(N(221 + 27\sqrt{67}) = -2,\ N(90 + 11\sqrt{67}) = -7,\ N(6 + \sqrt{67}) = -31)$$

$$\begin{aligned} G_1^{X/\Gamma_1}\left(i, \frac{1 + i\sqrt{67}}{2}\right) &= \log\left|1728 - j\left(\frac{1 + i\sqrt{67}}{2}\right)\right|^2 \\ &= 2\log(2^6\, 3^6\, 7^2\, 31^2\, 67) \end{aligned}$$

(Gross − Zagier[6] の特別な場合)

何故 $k = (1), 2, 3, 4, 5, 7$ か？ というのは，このとき $S_{2k}(\Gamma_1) = \{0\}$ となるからである．k : odd, $S_{2k}(\Gamma_1) \neq \{0\}$ のときは $G_k(z, z')$, (z, z' :CM points) は $L'(f, k)$, ($f \in S_{2k}(\Gamma_1)$: Hecke form) に関係する (k : odd より $L(f, k) = 0$) .

一般の Γ について，$k = 1$ のとき $\dim S_2(\Gamma) = g = \overline{\mathfrak{h}/\Gamma}$ の genus. $\dim S_2(\Gamma) = 0 \left(\Longleftrightarrow \overline{X/\Gamma} \underset{j_\Gamma}{\cong} \mathbf{P}^1 \right)$ のときは

Conjecture $G_1^{X/\Gamma}(z, z') = \log(\text{代数的数})$, $\qquad$ (z, z' : CM point).

$\dim S_2(\Gamma) = g > 0$ のときは，次の結果がある．

Theorem II.3 ([5]) $f_1, \cdots, f_g \in S_2(\Gamma)$: Hecke form の basis

$$\sum_{\text{finite}} G_1(\text{CM points}) + \log(\text{有理数}) + \sum_{j=1}^{g} (*)\, L'(f_j, 1) = 0$$

別の結果として次の定理についても述べる．

Theorem II.4 $\mathfrak{h}/\boldsymbol{Z}$ の Green 関数 $G_k^{\mathfrak{h}/Z}(z, z')$ は polylogarithms によって書き表せる．

9 $\mathfrak{h}$ の Green 関数

まず $X = \mathfrak{h}$ に対し $g_s(z, z') = G_s^{\mathfrak{h}}(z, z')$, $(s \in \boldsymbol{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0)$ を作る．これは

1. $\Delta g_s = s(1-s)\, g_s$, $\quad (z, z'$ について $)$
2. $z = z'$ で log-singularity

を満たすものである．ここで重要なことは，微分作用素 $\Delta = -y^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ と $SL_2(\boldsymbol{R})$ の $\mathfrak{h}$ 上の関数への作用とが可換であることである．よって，$G_s^{\mathfrak{h}}(z, z')$ が 1., 2. を満たせば $G_s^{\mathfrak{h}}(gz, gz')$, $(g \in SL_2(\boldsymbol{R}))$ もやはり満たす．従って 1., 2. が G_s を特徴付けるとすれば

(6) $$G_s^{\mathfrak{h}}(z, z') = G_s^{\mathfrak{h}}(g\,z, g\,z'), \qquad (\forall g \in SL_2(\boldsymbol{R}))$$

でなければならない．そこで $\Gamma = \boldsymbol{Z}$ もしくは $SL_2(\boldsymbol{Z})$ の指数有限部分群に対する $G_s^{\mathfrak{h}/\Gamma}$ を（収束するとして）

$$G_s^{\mathfrak{h}/\Gamma}(z, z') := \sum_{\gamma \in \Gamma} G_s^{\mathfrak{h}}(z, \gamma\, z')$$

で定義すると $G_s^{\mathfrak{h}/\Gamma}$ は各変数について Γ 不変となり，$\mathfrak{h}/\Gamma$ 上の Green 関数が得られることになる．

さて z と z'の（双曲的）距離を $d(z, z')$ とする．これは $SL_2(\boldsymbol{R})$ の元で，z を i に，z' を虚軸上 ie^d に持っていったときの d に等しい．条件 (6) より $G_s^{\mathfrak{h}}(z, z')$ は $d(z, z')$ の関数である．変数 $d = d(z, z')$ の代りに

$$1 + \frac{|z - z'|^2}{2\,y\,y'} = \cosh d(z, z'), \qquad (y = \mathrm{Im}(z),\ y' = \mathrm{Im}(z'))$$

をとる．ここで等号は次のようにして確かめられる．z, z' をそれぞれ $\dfrac{az+b}{cz+d}, \dfrac{az'+b}{cz'+d}$, $(ad-bc=1)$ に変換したとき y, y', $z-z'$ はそれぞれ $\dfrac{y}{|cz+d|^2}, \dfrac{y'}{|cz'+d|^2}, \dfrac{z-z'}{(cz+d)(cz'+d)}$ となるから，$1+\dfrac{|z-z'|^2}{2yy'}$ は不変．従って $z \to i$, $z' \to ie^d$ として，

$$1+\frac{|z-z'|^2}{2yy'} = 1+\frac{(e^d-1)^2}{2e^d} = \frac{1}{2}(e^d+e^{-d}) = \cosh d$$

となる．

さて，区間 $(1,\infty)$ 上の関数 $q(t)$, $t \in (1,\infty)$ によって

$$g_s(z,z') = G_s^{\mathfrak{h}}(z,z') = q\left(1+\frac{|z-z'|^2}{2yy'}\right)$$

と書けるとすると，条件の 1. $\Delta_z g_s = s(1-s)g_s$ は q についての 2 階の常微分方程式と同値になり，2. $g_s(z,z') = \log|z-z'|^2 + O(1)$, $(z \to z')$ は $q(t) = \log(t-1) + O(1)$, $(t \to 1)$ と同値になる．又無限遠での条件として 3. $t \to \infty$ で小，であるとする．1. の 2 階常微分方程式を書き下すと

$$(1-t^2)q''(t) - 2tq'(t) + s(s-1)q(t) = 0$$

となる．これは Legendre の微分方程式に他ならない．その独立な 2 つの解 P_{s-1}（第 1 種）と Q_{s-1}（第 2 種）の境界での様子は

	$t \to 1$	$t \to \infty$
P_{s-1}	$O(1)$	big
Q_{s-1}	log-sing	$o(1) = O(\frac{1}{\lvert t\rvert^s})$

となっている．従って条件 2., 3. より求める答は

$$g_s(z,z') = G_s^{\mathfrak{h}}(z,z') = -2\,Q_{s-1}\left(1+\frac{|z-z'|^2}{2yy'}\right) \tag{7}$$

である．ここに

$$\begin{aligned} Q_{s-1}(t) &= \text{第 2 種 Legendre 関数} \\ &= \int_0^\infty \frac{dv}{(t+\sqrt{t^2-1}\cosh v)^s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{s-1}\frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)}(t+1)^{-s}F(s,s;2s;\frac{2}{1+t}) \\
&\sim 2^{s-1}\frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)}t^{-s}, \qquad (t\to\infty) \\
&\sim -\frac{1}{2}\log(t-1), \qquad (t\to 1)
\end{aligned}$$

($F(\alpha,\beta;\gamma;x)$: Gauss の超幾何級数). $s=k\in\boldsymbol{N}$ のときは $P_{k-1}(t)$ は $k-1$ 次の多項式 ("Legendre 多項式 ") で

$$\begin{aligned}
Q_{k-1}(t) &= P_{k-1}(t)\frac{1}{2}\log\frac{t+1}{t-1}+(k-2\text{ 次多項式}) \\
&= O\left(\frac{1}{t^k}\right), \qquad (t\to\infty)\,.
\end{aligned}$$

(これらの条件で P_{k-1}, Q_{k-1} が定数倍を除き一意に決まる.)

Example II.2

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= 1, \\
Q_0(t) &= \frac{1}{2}\log\frac{t+1}{t-1}=\frac{1}{2}\log(1+\frac{2}{t}+\cdots)=\frac{1}{t}+\cdots \qquad (t\to\infty), \\
P_1(t) &= t, \\
Q_1(t) &= \frac{t}{2}\log\frac{t+1}{t-1}-1, \\
P_2(t) &= \frac{3t^2-1}{2}, \\
Q_2(t) &= \frac{3t^2-1}{4}\log\frac{t+1}{t-1}-\frac{3}{2}t.
\end{aligned}$$

実際，例えば P_2,Q_2 を $Q_2(t)=O(\frac{1}{t^3})$ によって決めてみる ($P_k(1)=1$ で normalize). $P_2(t)=at^2+bt+c$, $Q_2(t)=P_2(t)\cdot\frac{1}{2}\log\frac{t+1}{t-1}-(dt+e)$ とおく.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log\frac{t+1}{t-1} &= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{t}+\frac{0}{t^2}+\frac{\frac{1}{3}}{t^3}+\frac{0}{t^4}+\cdots\,.
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
Q_2(t) &= (at^2+bt+c)\left(\frac{1}{t}+\frac{0}{t^2}+\frac{\frac{1}{3}}{t^3}+\frac{0}{t^4}+\cdots\right)-(dt+e) \\
&= (a-d)t+(b-e)+\left(\frac{a}{3}+c\right)\frac{1}{t}+\frac{b}{3}\frac{1}{t^2}+\cdots\,.
\end{aligned}$$

よって $a-d=b-e=\frac{a}{3}+c=\frac{b}{3}=0$ でなければならず，これより $a=-3c$, $b=0$, $d=a$, $e=0$ となり，$P_2(1)=1$ より

$$P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2},\quad Q_2(t)=\frac{3t^2-1}{4}\log\frac{t+1}{t-1}-\frac{3}{2}t$$

が得られる．(7) より

$$\begin{aligned}G_1^{\mathfrak{h}}(z,z') &= -2\,Q_0\Big(1+\frac{|z-z'|^2}{2yy'}\Big)\\ &= -\log\frac{2+\frac{|z-z'|^2}{2yy'}}{\frac{|z-z'|^2}{2yy'}}=\log\left|\frac{z-z'}{z-\overline{z'}}\right|^2.\end{aligned}$$

同様に，各 $G_k^{\mathfrak{h}}$ は初等的に

$$G_k^{\mathfrak{h}}(z,z')=(\text{多項式})\cdot\log\left|\frac{z-z'}{z-\overline{z'}}\right|^2+(\text{多項式})$$

と書ける．

ここで，$g_s(z,z')=G_s^{\mathfrak{h}}(z,z')$ の別の性質を証明しておく．z' を固定し，$d\mu=\dfrac{dx\,dy}{y^2}$ とすると，z' に無関係に

$$\int_{\mathfrak{h}} g_s(z,z')\,d\mu=\frac{4\pi}{s\,(1-s)}\,.$$

Proof. $w=\dfrac{z-z'}{z-\overline{z'}}$ によって，$(\mathfrak{h},z')$ を $(D,0)$ に写すと $(D=\{|w|<1\})$

$$1+\frac{|z-z'|^2}{2\,y\,y'}=\frac{1+|w|^2}{1-|w|^2}$$

及び，$w=u+iv=r\,e^{i\theta}$ とすると

$$\frac{dx\,dy}{y^2}=\frac{4\,du\,dv}{(1-|w|^2)^2}=\frac{4\,r\,dr\,d\theta}{(1-r^2)^2}$$

ゆえ

$$\int_{\mathfrak{h}} g_s(z,z')\,d\mu \;=\; -8\int_D Q_{s-1}\Big(\frac{1+|w|^2}{1-|w|^2}\Big)\frac{du\,dv}{(1-|w|^2)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= -8 \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} Q_{s-1}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\frac{r\,dr\,d\theta}{(1-r^2)^2} \\
&\qquad\qquad \left(t=\frac{1+r^2}{1-r^2},\ dt=\frac{4\,r\,dr}{(1-r^2)^2}\ \text{により}\right) \\
&= -4\pi\int_1^\infty Q_{s-1}(t)\,dt \\
&= \frac{4\pi}{s\,(1-s)}\,.
\end{aligned}
$$

（最後の積分は $Q_{s-1}(t)=\dfrac{1}{2^s}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{s-1}(t-x)^{-s}\,dx$ を用いると容易に求まる.）

10　$\mathfrak{h}/Z$ の Green 関数

$\mathfrak{h}/\boldsymbol{Z}$ の Green 関数を Fourier 展開すると係数に Bessel 関数が現われる．そこでまず Bessel 関数について少し述べる．$\nu\in\boldsymbol{C}$ に対し 3 種類の Bessel 関数が次で定義される：

$$
\begin{aligned}
J_\nu(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \\
I_\nu(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \\
K_\nu(x) &:= \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\left(I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)\right)
\end{aligned}
$$

これらの $x=0$, 及び ∞ での挙動を表にすると

	0	∞
$J_\nu(x)$	$\sim\dfrac{x^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\dfrac{\pi\nu}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$
$I_\nu(x)$	$\sim\dfrac{x^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}$	$\dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$
$K_\nu(x)$	$\sim 2^{\lvert\nu\rvert-1}\,\Gamma(\lvert\nu\rvert)\,x^{-\lvert\nu\rvert}$ $\boldsymbol{R}\ni\nu\neq 0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left(1+O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

ν が半整数のとき，3 つの関数は初等関数で表される．例えば，

$$I_{\frac{1}{2}} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\,.$$

一般の $s = k \in \boldsymbol{N}$ に対しては

$$\begin{aligned} K_{k-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-x} \frac{h_{k-1}(x)}{x^{k-\frac{1}{2}}}\,, \\ I_{k-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(e^{x}\, h_{k-1}(-x) - e^{-x}\, h_{k-1}(x))}{x^{k-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

ここに $h_{k-1}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k-1+n)!}{2^{n}\, n!\, (k-1-n)!}\, x^{k-1-n}$.

Lemma II.5 $\alpha \geq \beta > 0$, $\nu \in \boldsymbol{C}$, Re $(\nu) > 0$, $n \in \boldsymbol{R}$ に対し

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{\alpha\,\beta\, n^2}{t} - \Bigl(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\Bigr) t\Bigr)\, I_{\nu}(2t)\, \frac{dt}{t} \\ &\qquad = \begin{cases} \frac{1}{\nu}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu} & (n = 0) \\ 2\, K_{\nu}(2|n|\,\alpha)\, I_{\nu}(2|n|\,\beta) & (n \neq 0)\,. \end{cases} \end{aligned}$$

さて

$$g_s^{*}(z, z') = G_s^{\mathfrak{h}/Z}(z, z') = \sum_{n \in Z} g_s(z, z' + n)$$

を計算しよう．

Theorem II.6 $z = x + iy$, $z' = x' + iy' \in \mathfrak{h}$, $y > y'$ とする．このとき

$$\begin{aligned} &g_s^{*}(z, z') \\ &= \frac{4\pi}{1-2s}\, y^{1-s}\, y'^{s} - 4\pi\sqrt{y\, y'} \sum_{0 \neq n \in Z} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi\,|n|\, y)\, I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi\,|n|\, y')\, e^{2\pi i n (x - x')}\,. \end{aligned}$$

Proof.

$$g_s^{*}(z, z') = -2 \sum_{n \in Z} Q_{s-1}\Bigl(1 + \frac{(x - x' - n)^2 + (y - y')^2}{2\, y\, y'}\Bigr)\,.$$

ここで $\lambda > 1$ に対して成り立つ積分表示

$$Q_{s-1}(\lambda) = \pi \int_0^{\infty} e^{-2\pi\lambda t}\, I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi t)\, \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

を代入し，Theta 関数の変換公式

$$\sum_{n\in Z} e^{-\pi c(x+n)^2} = \sqrt{\frac{1}{c}} \sum_{n\in Z} e^{-\frac{\pi}{c}n^2+2\pi inx}, \qquad \text{(Poisson の和公式)}$$

において，$c \longrightarrow \frac{t}{yy'}$, $x \longrightarrow x - x'$ として得られる式

$$\sum_{n\in Z} \exp\left\{-\frac{\pi t}{yy'}(x-x'+n)^2\right\} = \sqrt{\frac{yy'}{t}} \sum_{n\in Z} \exp\left\{-\frac{\pi yy'}{t}n^2 + 2\pi in(x-x')\right\}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} g_s^*(z,z') &= -2\pi\sqrt{yy'} \sum_{n\in Z} \exp\{2\pi in(x-x')\} \\ &\qquad \times \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\pi yy'}{t}n^2 - \pi t\left(\frac{y'}{y}+\frac{y}{y'}\right)\right\} I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi t)\,\frac{dt}{t} \end{aligned}$$

ここで Lemma II.5 を用いれば，求める式が得られる．

Remark $y = y'$ でも $x - x' \notin \boldsymbol{Z}$ なら，右辺の級数は（ゆっくり）収束する．これから直接 $z \to z'$ のとき $g_s^*(z,z') = 2\log|z-z'| + O(1)$ を確かめることができる．

Th. II.6 を $s = k \in \boldsymbol{N}$ に specialize する．$s = 1$ とすると，$K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}$, $I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,(e^x - e^{-x})$ であるから，$q = e^{2\pi iz}$, $q' = e^{2\pi iz'}$ とすると

$$\begin{aligned} &g_1^*(z,z') \\ &= -4\pi y' - 4\pi\sqrt{yy'} \sum_{n\neq 0} \sqrt{\frac{\pi}{4\pi|n|y}}\,e^{-2\pi|n|y} \\ &\qquad\qquad \times\sqrt{\frac{1}{4\pi^2|n|y'}}\left(e^{2\pi|n|y'} - e^{-2\pi|n|y'}\right)e^{2\pi in(x-x')} \\ &= -4\pi y' - \sum_{n\neq 0}\frac{1}{|n|}\left(\exp\{-2\pi|n|(y-y') + 2\pi in(x-x')\}\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \exp\{-2\pi|n|(y+y') + 2\pi in(x-x')\}\right) \\ &= -4\pi y' - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(q^n q'^{-n} + \overline{q}^n\,\overline{q'}^{-n} - q^n\,\overline{q'}^n - \overline{q}^n q'^n\right) \\ &= \log|q'|^2 + \log\left(1 - \frac{q}{q'}\right) + \log\left(1 - \frac{\overline{q}}{\overline{q'}}\right) - \log(1 - q\,\overline{q'}) - \log(1 - \overline{q}\,q') \\ &= \log\left|\frac{q-q'}{1-\overline{q}\,q'}\right|, \qquad (y > y' \text{としているから，} |q| < |q'|). \end{aligned}$$

一般の $s=k$ についても先に書いた $K_{k-\frac{1}{2}}, I_{k-\frac{1}{2}}$ の具体的な式を代入すれば g_k^* がいわゆる多重 log (polylogarithm) で書けることがわかる．多重 log は次のように定義される．各自然数 m と $|x|<1$ に対し

$$Li_m(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^m}.$$

これは $\boldsymbol{C}\backslash[1,\infty)$ 上の一価解析関数を定め，

$$\frac{d}{dx} Li_m(x) = \frac{1}{x} Li_{m-1}(x), \quad Li_1(x) = \log \frac{1}{1-x}$$

であるが，$[1,\infty)$ を横切るときに多価性が生じる．そこで，Bloch-Wigner 関数

$$D_2(x) = \mathrm{Im}(Li_2(x)) + \arg(1-x)\log(x)$$

（これは $\boldsymbol{C}\backslash(0,1)$ 上の一価解析関数）を一般化した $D_m(x)$ を用いる．これは m : odd に対しては

$$D_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-\log|x|)^j}{j!} \mathrm{Re}(Li_{m-j}(x)), \quad \left(Li_0(x) := -\frac{1}{2}\right)$$

で与えられ $\boldsymbol{C}\backslash(0,1)$ に解析接続され関数等式

$$D_m\left(\frac{1}{x}\right) = D_m(x)$$

を満たす．これを用いると $s=k\in\boldsymbol{N}$ の場合の $\mathfrak{h}/\boldsymbol{Z}$ の Green 関数 $g_k^* = G_k^{\mathfrak{h}/Z}$ は次のように書ける．

Theorem II.7 $k\in\boldsymbol{N}$.

$$\begin{aligned} & g_k^*(z,z') \\ &= -\frac{2}{(-4\pi^2 yy')^{k-1}} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell:\mathrm{odd}}}^{2k-1} \alpha_\ell(2\pi y, 2\pi y') \left\{ D_\ell\left(\frac{q}{q'}\right) - D_\ell(q\,\overline{q'}) \right\}. \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \alpha_\ell(u,v) &= \sum_{\substack{r,s\geq 0 \\ 2r+2s=2k-1-\ell}} u^{2r} v^{2s} \frac{(2k-2-2r)!}{2^{k-1} r!(k-1-r)!} \frac{(2k-2-2s)!}{2^{k-1} s!(k-1-s)!} \\ &\in \boldsymbol{Q}[u,v] \end{aligned}$$

$D_\ell\left(\frac{1}{x}\right) = D_\ell(x) = D_\ell(\overline{x})$ だから $D_\ell(\frac{q}{q'}) - D_\ell(q\,\overline{q'})$ も $z \leftrightarrow z'$ に関して対称である．これまでの計算（但し $X = \mathfrak{h}\,/\Gamma$ については証明をしていない）を表にまとめると

	$X = \mathfrak{h}$	$X = \mathfrak{h}/\boldsymbol{Z}$	$X = \mathfrak{h}/\Gamma$
一般の s	$-2\,Q_{s-1}(*)$	$\sum e^{2\pi i n(x-x')}$ $\times K_{s-\frac{1}{2}}(*) I_{s-\frac{1}{2}}(*)$	———
$s = k$ $k > 1$	(多項式) $\log\left\|\frac{z-z'}{\bar{z}-z'}\right\|$ +(多項式)	$\sim$ polylogarithm (一価に modify したもの)	———
$s = 1$	$\log\left\|\frac{z-z'}{\bar{z}-z'}\right\|^2$	$\log\left\|\frac{q-q'}{1-\bar{q}\,q'}\right\|^2$	$\log\|j(z) - j'(z')\|^2$

11 Canonical height pairing との関係—— motivation

この節では Néron-Tate pairing について簡単に述べる．これが Green 関数を考える 1 つの動機となっている．X をコンパクト Riemann 面，$D = \sum n_x x$, $D' = \sum n_{x'} x'$ を次数 0 の因子とすると，序において述べたように

$$< D, D' >_\infty = \sum_{x,x' \in X} n_x\, n'_x\, G^X_{(s=1)}(x, x')$$

によって pairing ができるのであるが，これが arithmetic な場合，つまり X, D, D' が $\boldsymbol{Q}$（もしくは数体）上定義されている場合に，いわゆる canonical height (Néron-Tate) pairing の無限成分を与えるのである．以下にこれを説明しよう．

X は $\boldsymbol{Q}$ 上定義されているとし，$J_X = \{$ 次数 0 の因子 $\}/\{$ 主因子 $(f)\}$ とする．$f : X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ は X 上の有理関数を動き $(f) = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f)\, x$ である．J_X は $\boldsymbol{Q}$ 上定義されたアーベル多様体 (X の Jacobi 多様体) で，$g = g(X)$ を X の種数とすると

$$J_X(\boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{C}^g/(\text{lattice})$$

となる．Mordell-Weil の定理によって J_X の $\boldsymbol{Q}$-有理点のなす群は有限生成アーベル群：$J_X(\boldsymbol{Q}) \cong \boldsymbol{Z}^r \oplus$ 有限群 $(r \geq 0)$．$J_X(\boldsymbol{Q})$ 上には canonical height と呼ばれる関数

$$\begin{array}{rcl} h : J_X(\boldsymbol{Q}) & \longrightarrow & \boldsymbol{R}_{\geq 0} \\ {[D]} & \longmapsto & h(D) \end{array}$$

が存在する．これは例えば楕円曲線の場合次のようなものである．X を $y^2 = x^3 + ax + b$ で定義される楕円曲線とする．この場合 $J_X(\boldsymbol{Q}) = X(\boldsymbol{Q})$ であって $X(\boldsymbol{Q})$ の点 P とは Diophantus 方程式 $y^2 = x^3 + ax + b$ の解 $(x, y) \in \boldsymbol{Q}^2$（もしくは無限遠点）に他ならない．$P$ を n 倍した点を $nP = (x_n, y_n)$, $(x_n, y_n \in \boldsymbol{Q})$ とする．$n \to \infty$ のとき x_n, y_n を既約分数で表したときの分母分子は非常に大きくなるが，d_n を x_n の分母分子の桁数のうちの大きい方とするとき height $h(P)$ は，おおよそ

$$h(P) \sim \lim_{n \to \infty} \frac{d_n}{n^2}$$

であり，又 $h(nP) = n^2 h(P)$ を満たし

$$n^2 h(P) = h(nP) = \log(\max\{\mathrm{num}(x_n), \mathrm{den}(x_n)\}) + O(1)$$

となる．$h(P)$ は点 P の“複雑さ”を計るもの，と言える．

さて一般に $[D] \longrightarrow h(D)$ は，$J_X(\boldsymbol{Q}) \otimes \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^r$ 上の 2 次形式を定めており，従って双 1 次形式

$$<,>: J_X(\boldsymbol{Q}) \times J_X(\boldsymbol{Q}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

で $h(D) =< [D], [D] >$ なるものが存在する．今 $[D], [D'] \in J_X(\boldsymbol{Q})$, $|D| \cap |D'| = \emptyset$ として（D, D' は X 上の因子）

$$< [D], [D'] > = \sum_{p:\mathrm{prime}} < D, D' >_p + < D, D' >_\infty$$

なる分解を考える．但し $< D, D' >_v$（$v = p$ 又は ∞）は，次の 3 つの性質を持つとする．

1. 連続 ($X(\boldsymbol{Q}_v)$ 上の v 進位相で)

2. 双 1 次

3. principal divisor property をもつ

3. の意味は，$D=\sum n_i X_i$, $f: X \longrightarrow \mathbf{P}^1$ (ともに $\boldsymbol{Q}_v$ 上定義されているとする)，$|D|\cap|(f)|=\emptyset$ とするとき

$$< D,(f) > = \sum n_i \log|f(x_i)|_v$$

が成り立つことである．ここに $\log|f(x_i)|_v$ は $v=\infty$ のとき $\log|f(x_i)|$, $v=p$ のとき $\mathrm{ord}_p(f(x_i))\cdot\log p$ とする．

Proposition II.8

1. 上の 1. ～ 3. を満たす $<,>_v$ が存在し，しかも唯一つである．

2. D, D' が $\boldsymbol{Q}$ 上定義されているとき，殆んどすべての p に対し

$$< D, D' >_p = 0\,.$$

従って，和 $\displaystyle\sum_{p:\mathrm{prime}} < D,D' >_p$ は実質的に有限和である．

Proof. *1.* まず一意性を示す．
$<,>_v^{(1)}$, $<,>_v^{(2)}$ が共に 1. ～ 3. を満たすとする．このとき，$<,>^* = <,>_v^{(1)} - <,>_v^{(2)}$ は 1. , 2. 及び 3. $< D,(f) >= 0$, を満たす．従って D を任意に固定したとき，$D' \longmapsto < D,D' >^*$ は連続準同型 $J_X(\boldsymbol{Q}_v) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を引き起こすが，$J_X(\boldsymbol{Q}_v)$ はコンパクト群ゆえ連続準同型は 0 写像しかない．よって $<,>^* \equiv 0$.
次に構成法を示す．$v=p$ に対しては，$< D,D' >_v := (D\cdot D')_{Q_p}\cdot\log p$ が 1.～ 3. を満たす．$(D\cdot D')_{Q_p}$ は intersection pairing であって，ごく大ざっぱに言うと，$D=\sum n_i x_i$, $D'=\sum m_j y_j$ とするとき

$$(D\cdot D')_{Q_p} = \sum_{i,j} n_i m_j \cdot (x_i \equiv y_j \pmod{p^r} \text{ となる最大の整数 } r)$$

で与えられる．$v=\infty$ のときは Green 関数による pairing

$$\begin{aligned} < D,D' >_\infty &= \sum_{i,j} n_i\, m_j\, G^X(x_i,y_j) \\ &= \sum_i n_i G_{D'}(x_i) \end{aligned}$$

が求めるものになる．ここで

$$G_{D'}(x) = \sum_j m_j\, G^X(x,y_j)\,, \qquad (D' = \sum m_j\, y_j)\,.$$

$G_{D'}(x)$ は

- $\Delta G_{D'}(x) = 0, \quad (\forall x \in X(\boldsymbol{C}) \backslash D')$
- $G_{D'}(x) = m_j \log |x - y_j|^2 + O(1), \quad (x \to y_j)$

を満たし，この 2 条件で定数の差を除き特徴付けられる．今 $D' = (f)$ であるとすると，$\varphi(x) = \log |f(x)|^2$ が 1.，2. を満たすから，$G_{(f)}(x) = \log |f(x)|^2 +$ (定数) であり $D = \sum n_i x_i$ は次数 0, $(\sum n_i = 0)$ であるので，この定数によらずに

$$< D, (f) >_\infty = \sum n_i \, G_{(f)}(x_i) = \sum n_i \log |f(x_i)|^2$$

となり 3. を満たす．これで存在がいえる．

2. $x \in |D|, x' \in |D'|$ に対し，$\max\{r; x \equiv x' \pmod{p^r}\}$ が 0 とならないような p は有限個しかないので明らか．

この Prop. II.8 より，X 上の次数 0 の因子群上の pairing

$$< D, D' > = \sum_{v=p,\infty} < D, D' >_v$$

が定義され意味を持つ (有限和)．しかも

$$\begin{aligned} < D, (f) > &= \sum_i n_i \sum_{v=p,\infty} \log |f(x_i)|_v^2 \\ & \qquad \text{(principal divisor property)} \\ &= 0, \qquad \text{(product formula)} \end{aligned}$$

であるから，$< D, D' + (f) > = < D, D' >$．同様に，$< D + (f), D' > = < D, D' >$．従って $J_X(\boldsymbol{Q})$ 上の pairing $< [D], [D'] >$ が $< [D], [D'] > = < D, D' >$ により well-defined．これが先に述べた canonical height pairing である．

12 $\mathfrak{h}\,/\Gamma$ の Green 関数—— Fourier 展開

この節及び次の節で行うことは

1. $G_s(z, z') = G_s^{\mathfrak{h}/\Gamma}$, $\Gamma = PSL_2(\boldsymbol{Z})$, の Fourier 展開を計算する
2. 特に $s = k \in \boldsymbol{N}$ のとき $G_k^{\mathfrak{h}/\Gamma}$ がどうなるかを見る

ことである．驚くことに $G_k^{\mathfrak{h}/\Gamma}$ と重さ $2k$ の正則 modular 形式が関係するのであり，関係の仕方も次の 2 通りがある (Gross-Zagier [5])．

- Fourier 係数が特別なものになる
- 特殊値 $G_k(z,z')$, $(z,z':\mathrm{CM})$ と $L'(f,k)$, $(f\in S_k)$ の関係

我々は $g_s(z,z')$ で $\mathfrak{h}$ 上の，$g_s^*(z,z')$ で $\mathfrak{h}/\boldsymbol{Z}$ 上の Green 関数を表した．$\mathfrak{h}/\Gamma$ 上の Green 関数 $G_s(z,z')$ は

$$\begin{aligned} G_s(z,z') &= \sum_{\gamma\in\Gamma} g_s(z,\gamma z') \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} g_s^*(z,\gamma z') \end{aligned}$$

である．特殊値 $G_s(z,z')$, $(z,z':\mathrm{CM})$ の計算には第 1 の表示を用い，Fourier 展開には第 2 の表示を用いる．

この節では Fourier 展開を求める．まず $G_s(z,z')$ の Γ -不変性より z を $y=\mathrm{Im}\,(z)\geq \mathrm{Im}\,(\gamma z)$, $(\forall\gamma\in\Gamma)$ となるように選べる．さらに $y>\mathrm{Im}\,(\gamma z')$, $(\forall\gamma\in\Gamma)$ と仮定する．すると，各々の $g_s^*(z,\gamma z')$ に Th. II.6 が適用できて

$$\begin{aligned} G_s(z,z') &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} g_s^*\left(z,\frac{az'+b}{cz'+d}\right), \qquad \left(\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\right) \\ &= \frac{4\pi}{1-2s}y^{1-s}E(z',s) \\ &\quad -4\pi\sqrt{y}\sum_{m\neq0}K_{s-\frac12}(2\pi|m|x)e^{-2\pi imx}F_m(z',s)\,. \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} E(z',s) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\mathrm{Im}(\gamma z')^s \\ F_m(z',s) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\mathrm{Im}(\gamma z')^{\frac12}I_{s-\frac12}(2\pi|m|\mathrm{Im}(\gamma z'))\exp\{2\pi im\mathrm{Re}(\gamma z')\}\,. \end{aligned}$$

$E(z,s)$ の Fourier 展開はよく知られており

$$\begin{aligned} &E(z,s) \\ &= y^s+\frac{\pi^{\frac12}\Gamma(s-\frac12)\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)}y^{1-s} \\ &\quad +\frac{2\pi^s\sqrt{y}}{\Gamma(s)\zeta(2s)}\sum_{n\neq0}|n|^{s-\frac12}\sigma_{1-2s}(n)\,K_{s-\frac12}(2\pi|n|y)\,e^{2\pi inx} \end{aligned}$$

で与えられる．

$F_m(z,s)$ の展開も同じスタンダードな手法で求めることができる．まず $\Gamma_\infty\backslash\Gamma$ の代表系として，単位行列，及び各 (c,d), $(c\geq 1,(c,d)=1)$ ごとに 1 つずつ$\binom{ab}{cd}\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ をとっておく．すると

$$\begin{aligned}F_m(z,s) &= y^{\frac12}I_{s-\frac12}(2\pi|m|y)\,e^{2\pi imx}\\&\quad+\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{\substack{d\in Z\\(c,d)=1}}\frac{y^{\frac12}}{|cz+d|}I_{s-\frac12}\left(\frac{2\pi|m|y}{|cz+d|^2}\right)\exp\left\{2\pi im\mathrm{Re}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right\}\end{aligned}$$

$\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{a}{c}-\dfrac{1}{c(cz+d)}$ 及び d の和を $\bmod c$ の各類ごとに分けると，右辺第 2 項の内部の和は

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{d\pmod c\\(d,c)=1}}e_c(md^{-1})\sum_{r\in Z}\frac{y^{\frac12}}{|cz+d+cr|}I_{s-\frac12}\left(\frac{2\pi|m|y}{|cz+d+cr|^2}\right)\\&\qquad\qquad\times\exp\left\{-\frac{2\pi im}{c}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{cz+d+cr}\right)\right\}\\&=\frac1c\sum_{\substack{d\pmod c\\(d,c)=1}}e_c(md^{-1})\sum_{r\in Z}\frac{y^{\frac12}}{|z+r+\frac dc|}I_{s-\frac12}\left(\frac{2\pi|m|c^{-2}y}{|z+r+\frac dc|^2}\right)\\&\qquad\qquad\times\exp\left\{-\frac{2\pi im}{c^2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z+r+\frac dc}\right)\right\}\end{aligned}$$

となる．ここに $e_c(n)=\exp\left(\dfrac{2\pi in}{c}\right)$ で，$e_c(md^{-1})$ は $ad\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ c)$ なる a をとったときの $\exp\left(\dfrac{2\pi ima}{c}\right)$ の意．ここで Poisson の和公式

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(z+r)=\sum_{n\in Z}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi inx}\varphi(x+iy)dx\right)e^{2\pi inx},\qquad(z=x+iy)$$

を $\varphi(z)=\dfrac{y^{\frac12}}{|z|}I_{s-\frac12}\left(\dfrac{|\alpha|y}{|z|^2}\right)e^{-i\alpha\mathrm{Re}(\frac1z)}$ (後で $\alpha=\dfrac{2\pi m}{c^2}$ とする) に対して適用すると

$$\begin{aligned}&\sum_{r\in Z}\frac{y^{\frac12}}{|z+r|}I_{s-\frac12}\left(\frac{|\alpha|y}{|z+r|^2}\right)e^{-i\alpha\mathrm{Re}(\frac{1}{z+r})}\\&\quad=\sum_{n\in Z}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi inx}\frac{y^{\frac12}}{|x+iy|}I_{s-\frac12}\left(\frac{|\alpha|y}{|x+iy|^2}\right)e^{-i\alpha\mathrm{Re}(\frac{1}{x+iy})}dx\right)e^{2\pi inx}\\&\quad\overset{x\to yt}{=}y^{\frac12}\sum_{n\in Z}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi inyt}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}I_{s-\frac12}\left(\frac{|\alpha|}{y(t^2+1)}\right)e^{-i\alpha(\frac{t}{y(t^2+1)})}dt\right)e^{2\pi inx}\end{aligned}$$

$z \to z + \frac{d}{c}$, $\alpha \to \frac{2\pi m}{c^2}$ とすると

$$\sum_{r \in Z} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{|z+r+\frac{d}{c}|} I_{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|m|c^{-2}y}{|z+r+\frac{d}{c}|^2}\right) \exp\left\{-\frac{2\pi i m}{c^2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z+r+\frac{d}{c}}\right)\right\}$$
$$= y^{\frac{1}{2}} \sum_{n \in Z}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} I_{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi|m|}{c^2 y}\frac{1}{t^2+1}\right) \times \exp\left(-\frac{2\pi i m}{c^2 y}\frac{t}{t^2+1} - 2\pi i n y t\right) dt\right) e^{2\pi i n x}$$

これと次の Lemma を用いる.

Lemma II.9 $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \neq 0$, $\nu \in \boldsymbol{C}$, $\mathrm{Re}(\nu) > 0$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} I_\nu\left(\frac{|\alpha|}{t^2+1}\right) \exp\left\{\frac{i\alpha t}{t^2+1} + i\beta t\right\} dt = \begin{cases} 2K_\nu(|\beta|)\, J_{2\nu}(2\sqrt{\alpha\beta}) & (\alpha\beta > 0), \\ 2K_\nu(|\beta|)\, I_{2\nu}(2\sqrt{-\alpha\beta}) & (\alpha\beta < 0), \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{\nu\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^\nu & (\beta = 0). \end{cases}$$

以上から $F_m(z,s)$ の Fourier 展開は

$$\begin{aligned} &F_m(z,s) \\ &= \sqrt{y}\, I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\, e^{2\pi i m x} + \frac{\pi^s |m|^{s-\frac{1}{2}} y^{1-s}}{(s-\frac{1}{2})\Gamma(s)} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_c(m,0)}{c^{2s}} \\ &\quad + 2\sqrt{y} \sum_{\substack{n \in Z \\ mn>0}} \left[\sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_c(m,n)}{c} J_{2s-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right] K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x} \\ &\quad + 2\sqrt{y} \sum_{\substack{n \in Z \\ mn<0}} \left[\sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_c(m,n)}{c} I_{2s-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{-mn}}{c}\right)\right] K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x} \end{aligned}$$

となる. 但し $S_c(m,n) = \sum_{\substack{d\,(\mathrm{mod}\ c) \\ (d,c)=1 \\ dd^*=1(c)}} e_c(nd + md^*)$: Kloosterman sum.

従って, 求める G_s の展開は次の通り.

$$\begin{aligned} &G_s(z,z') \\ &= \frac{4\pi}{1-2s} y^{1-s} y'^s + \frac{4\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma(s-\frac{1}{2})\zeta(2s-1)}{(1-2s)\Gamma(s)\zeta(2s)} y^{1-s} y'^{1-s} \end{aligned}$$

$$
+\frac{8\pi^{1+s}}{(1-2s)\Gamma(s)\zeta(2s)}\, y^{1-s}\, y'^{\frac{1}{2}} \sum_{n\neq 0} |n|^{s-\frac{1}{2}}\, \sigma_{1-2s}(n)\, K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y')\, e^{2\pi i n x'}
$$

$$
+\frac{8\pi^{1+s}}{(1-2s)\Gamma(s)}\, y^{\frac{1}{2}}\, y'^{1-s} \sum_{m\neq 0} |m|^{s-\frac{1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_c(m,0)}{c^{2s}}\, K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\, e^{-2\pi i m x}
$$

$$
-4\pi y^{\frac{1}{2}} y'^{\frac{1}{2}} \sum_{m\neq 0} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\, I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y') e^{2\pi i m(x'-x)}
$$

$$
-8\pi y^{\frac{1}{2}} y'^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m,n\in Z\\ mn>0}} \left(\sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_c(m,n)}{c} J_{2s-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right)
$$

$$
\times K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\, K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y')\, e^{2\pi i(-mx+nx')}
$$

$$
-8\pi y^{\frac{1}{2}} y'^{\frac{1}{2}} \sum_{mn<0} \left(\sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_c(m,n)}{c} I_{2s-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{-mn}}{c}\right)\right)
$$

$$
\times K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\, K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y')\, e^{2\pi i(-mx+nx')}.
$$

上の右辺の第 1 項と第 5 項の和は Th. II.6 で与えた $g_s^*(z,z') = G_s^{\mathfrak{h}/Z}(z,z')$ の Fourier 展開に等しい．これまでは $z > \max_\gamma \mathrm{Im}\,(\gamma z')$ を仮定してきたが，実際任意の z, z' について次の対称な表示が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&G_s(z,z') \\
&= g_s^*(z,z') - (yy')^{1-s} \sum_{m,n\in Z} \left[\sum_{c=1}^{\infty} c^{-2s}\, V_s\left(\frac{mn}{c^2}\right) S_c(m,n)\right] \\
&\qquad\qquad \times \widetilde{K}_s(my)\, \widetilde{K}_s(ny')\, e^{2\pi i(mx-nx')}
\end{aligned}
$$

ここに $x \in \boldsymbol{R}$, $s \in \boldsymbol{C}$ に対し

$$
\begin{aligned}
V_s(x) &= (2\pi)^{2s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(4\pi^2 x)^n}{n!\,\Gamma(n+2s)} \\
&= \begin{cases} 2\pi x^{\frac{1}{2}-s} J_{2s-1}(4\pi\sqrt{x}) & (x>0) \\ \dfrac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma(2s)} & (x=0) \\ 2\pi(-x)^{\frac{1}{2}-s} I_{2s-1}(4\pi\sqrt{-x}) & (x<0), \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{K}_s(x) := \begin{cases} 2|x|^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|x|) & (x\neq 0) \\ \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\pi^{s-\frac{1}{2}}} & (x=0). \end{cases}
$$

（共に $x=0$ の場合は $x\neq 0$ の極限になっている．）

さて我々はこれを $s = k \in \boldsymbol{N}$ に特殊化する．

$$\pi_k(m,n) := \frac{\delta_{m,n}}{|n|^{2k-1}} + (-1)^k \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_c(m,n)}{c^{2k}} V_k\left(\frac{mn}{c^2}\right)$$

($\delta_{m,n}$ は Kronecker's delta, $n = 0$ のときは右辺第 1 項 $= 0$ とする) とおくとき

$$\begin{aligned} & G_k(z,z') \\ = \quad & g_k^*(z,z') + \sum_{m,n \in Z} \left(\frac{y, y' \text{の多項式}}{(yy')^{k-1}}\right) \pi_k(m,n) e^{2\pi i(mx - nx')} e^{-2\pi|m|y - 2\pi|n|y} \end{aligned}$$

となることがわかる．以下この係数 $\pi_k(m,n)$ について調べよう．

$$\pi_k(m,n) = \pi_k(n,m) = \pi_k(-m,-n)$$

である．$\pi_k(n) = \pi_k(1,n)$, $(n \in \boldsymbol{Z})$ とおく．Kloosterman 和に関する等式

$$S_c(m,n) = \sum_{d|(m,n,c)} d S_{\frac{c}{d}}\left(\frac{mn}{d^2}, 1\right)$$

より

$$\pi_k(m,n) = \sum_{0<d|m,n} d^{-2k+1} \pi_k\left(\frac{mn}{d^2}\right) \qquad (\forall m, n \in \boldsymbol{Z})$$

が成り立つから $\pi_k(n)$ についてわかればよい．いくつかの $\pi_k(n)$ の値を表にすると，

n	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$	$\pi_3(n)$	$\pi_4(n)$	$\pi_5(n)$	$\pi_6(n)$	$\pi_7(n)$
3	0	0	0	0	0	0.0040404434	0
2	0	0	0	0	0	−0.0332846177	0
1	0	0	0	0	0	2.8402873752	0
0	−24	240	−504	480	−264	94.8191027496	−24
−1	−196884	141444	−73764	28404	−8244	1842.8947269241	−324
−2	−21493760	8529280	−2695040	682240	−139520	23274.0754524189	−3200
−3	−864299970	238758390	−54755730	10460070	−1672290	225028.7587792691	−25650

13 Green 関数と正則保型形式，周期の理論との関係

この表を見て気付くことをいくつかあげると

- $\pi_6(n)$ 以外みな整数で，$n \geq 1$ で 0 となっている．
- $-\pi_1(-n)$, $(n = 1, 2, 3)$ は楕円 modular 関数 $j(z)$ の Fourier 係数である（そして $\pi_1(0) = -24$ となっていることが "正しい j" $= \dfrac{1}{q} + 24 + 196884q + \cdots$ である一つの理由である）．
- $\pi_k(0)$ は Eisenstein 級数 $E_{2k} = 1 - \dfrac{4k}{B_{2k}} q + \cdots$ の q の係数である．

これらはみな証明することができる．例えば

Proposition II.10

1. $S_{2k} = S_{2k}(\Gamma_1) = \{0\} \Longrightarrow \pi_k(n) \begin{cases} = 0 & (n > 0) \\ \in \boldsymbol{Z} & (n \leq 0). \end{cases}$

2. $f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_j(n) q^n$, $(1 \leq j \leq d = \dim S_{2k})$ を S_{2k} の基底とする．

このとき実数$\lambda_1, \cdots, \lambda_d$, $\mu_1, \cdots, \mu_d$ が存在して

$$\begin{aligned} n^{2k-1}\pi_k(n) &= \sum_{j=1}^{d} \lambda_j a_j(n), \quad (n > 0), \\ \pi_k(0) &\in \boldsymbol{Q}, \\ n^{2k-1}\pi_k(n) &= \sum_{j=1}^{d} \mu_j a_j(|n|) + (\text{整数}), \quad (n < 0). \end{aligned}$$

Proof. まず $k > 1$ とする．$m > 0$ に対して第 m Poincaré 級数

$$P_m(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} q^m|_{2k}\gamma = \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} (cz+d)^{-2k} \exp\left(2\pi i m \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

は S_{2k} に属し Fourier 展開 $P_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} \pi_k(m, n) q^n$ をもつ（F_m と同じ手法で計算される）．又，Hecke 作用素 $T(m)$ の作用により $m^{2k-1}P_m = P_1|_{2k}T(m)$. これからも先の式

$$\pi_k(m, n) = \sum_{d|m,n} d^{-2k+1} \pi_k\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

が得られる．さて $P_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1} \pi_k(n)\, q^n \in S_{2k}$ より $S_{2k} = \{0\}$ ならば $\pi_k(n) = 0$, $(n \geq 1)$ である．又一般には $P_1(z) = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j f_j(z)$, $(\exists \lambda_j \in \boldsymbol{R})$

であるから

$$n^{2k-1}\pi_k(n)=\sum_{j=1}^{d}\lambda_j a_j(n).$$

$m=0$ のとき $P_0(z)=E_{2k}(z)$ で

$$P_0(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}n^{2k-1}\pi_k(0,n)\,q^n\ .$$

これより $\pi_k(0)=\pi_k(0,1)=-\dfrac{4k}{B_{2k}}\in\boldsymbol{Q}$.
$m<0$ のとき P_m はやはり意味を持ち，上半平面上では正則，重さ $2k$ となる．Fourier 展開は

$$P_m(z)=q^m+\sum_{n=1}^{\infty}n^{2k-1}\pi_k(m,n)q^n.$$

このときも $|m|^{2k-1}P_m=P_{-1}|_{2k}T(|m|)$, $(m<0)$ が成り立つ．

$$P_{-1}(z)=\frac{1}{q}+\sum_{n=1}^{\infty}n^{2k-1}\pi_k(-n)\,q^n$$

今重さ $2k$ の上半平面上正則な形式で Fourier 係数が整数，かつ $q\to 0$ のとき $q^{-1}+O(q)$ なるものをとる．例えば

$$H(z)=E_4(z)^a E_6(z)^b(j(z)-c)\ ,$$

$(a,b\geq 0,\ 4a+6b=2k,\ c=240a-504b+744)$ ．すると $P_{-1}(z)-H(z)$ は 重さ $2k$ の cusp form となる．従って $S_{2k}=\{0\}$ なら $n^{2k-1}\pi_k(-n)\in\boldsymbol{Z}$ ，$(n\geq 1)$ である．実はより強く $\pi_k(-n)\in\boldsymbol{Z}$ が言える．実際 $S_{2k}=\{0\}$ ，$(k>1)$ なら重さ $14-2k$ の Eisenstein 級数 E_{14-2k} があって，$\left(\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{dz}\right)^{2k-1}\left(\dfrac{E_{14-2k}}{\Delta}\right)$ が重さ $2k$ ，上半平面上正則かつ $q\to 0$ のとき $q^{-1}+O(q)$ となり，$\dfrac{E_{14-2k}}{\Delta}$ が整係数ゆえ $\left(\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{dz}\right)^{2k-1}\left(\dfrac{E_{14-2k}}{\Delta}\right)$ の q^n の係数は $n^{2k-1}\times$ (整数) である．$S_{2k}\neq\{0\}$ のときは $n^{2k-1}\pi_k(-n)=\sum_{j=1}^{d}\mu_j a_j(n)+$ (整数), $(\exists\mu_j\in\boldsymbol{R})$ となる．次に $k=1$ のときであるが，このときも P_m を適当に modify して (“ Hecke trick ”) 定義することにより同様に議論できる $(m>0$ のとき $P_m=0$, $P_0=E_2=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$,

$m<0$ のとき $P_m = |m|^{-2k+1} H|_{2k} T(|m|)$, ここに $H = -q\dfrac{dj}{dq} = \dfrac{E_4^2 E_6}{\Delta}$, これは重さ 2 で, ∞ で $\dfrac{1}{q} + O(q))$.

次に, 我々の $G_k(z,z')$ の Fourier 展開の係数として得られる関数

$$\sum_n \pi_k(m,n)\,(y \text{と}\ n\ \text{の多項式})q^n \ (\text{or}\ \ \overline{q}^{|n|})$$

は $\sum_{n\geq 1} \pi_k(n) q^n$ や $\sum_{n\leq -1} \pi_k(n) q^{|n|}\,(+T(m))$ のある (non-holomorphic) derivative になっており, 又これらは Poincaré 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1}\,\pi_k(\pm n)\,q^n = P_{\pm 1}$ を $2k-1$ 回積分したものとなっている. この辺りの状況を見てみよう.

今 $D = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{dz}$ とおくと $D(M_k) \not\subset M_{k+2}$ であるが, 新たに $D_k = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{dz} - \dfrac{k}{4\pi y}\left(M_k \ni f \mapsto \dfrac{f'}{2\pi i} - \dfrac{kf}{4\pi y}\right)$ とおくと

$$(D_k f)|_{k+2}\gamma = D_k(f|_k\gamma)$$

が成り立つ. つまり D_k は重さ k のものを $k+2$ のものに写す. 但し正則性は保たないから, 必ずしも正則でない重さ k の modular form の空間を M_k^* と書くと

$$D_k : M_k^* \longrightarrow M_{k+2}^* .$$

これを n 回続けて作用させたものを D_k^n とする :

$$D_k^n : M_k^* \xrightarrow{D_k} M_{k+2}^* \xrightarrow{D_{k+2}} \cdots \xrightarrow{D_{k+2n-2}} M_{k+2n}^*$$

D_k^n は $\dfrac{d}{dz}$ と $\dfrac{1}{y}$ の多項式であるが

Miracle $\quad D_{2-k}^{k-1} = \left(\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1}.$

(これは §2 の最後の Miracle の説明にもなっている.) D_k^n が正則な微分になるのはこのときに限り

$$M_{2-k} \xrightarrow{D_{2-k}^{k-1}} M_k$$

となる. 重さ $2k$ の Poincaré 級数 $P_{-m} = q^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k-1}\pi_k(m,n)q^n$ の $2k-1$ 回積分 $\widetilde{P}_{-m} = -\dfrac{1}{m^{2k-1}}q^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty}\pi_k(m,n)q^n$ は重さ $2-2k$ で

$D^{2k-1}_{2-2k}(\tilde{P}_{-m}) = P_{-m}$. この途中で得られるもの，即ち$\tilde{P}_{-m}$ に D^{k-1}_{2-2k} を作用させて得られる $R_m = D^{k-1}_{2-2k}(\tilde{P}_{-m})$ が Green 関数の Fourier 展開に現われるものとなっている．

$$
\begin{aligned}
R_m &= \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}+\frac{1}{2\pi y}\right)\cdots\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}+\frac{k-2}{2\pi y}\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}+\frac{k-1}{2\pi y}\right)\tilde{P}_{-m} \\
&\in \bigoplus_{j=0}^{k-1}\frac{1}{y^j}\cdot(q\text{の Laurent 級数})
\end{aligned}
$$

14 $\mathfrak{h}/\Gamma$ の Green 関数— Heegner point における特殊値

前節で $G_k^{\mathfrak{h}/\Gamma} = G_k(z,z')$ の ∞ での様子（Fourier 展開）を論じてきたが，次に " Heegner points " $(z,z' \in \mathfrak{h}/\Gamma)$ における特殊値 $G_k(z,z')$ について見ることにする．

$\Gamma = SL_2(\boldsymbol{Z})$ の場合の Heegner point とは CM point，つまり $az^2+bz+c=0$, $(a,b,c\in\boldsymbol{Z})$ の根のことである．記号を復習すると $G_k^{\mathfrak{h}} = g_s(z,z')$, $G_k^{\mathfrak{h}/Z} = g_s^*(z,z')$, $G_k^{\mathfrak{h}/\Gamma} = G_s(z,z')$ で

$$
\begin{aligned}
G_s(z,z') &= \sum_{\gamma\in\Gamma} g_s(z,\gamma z') \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} g_s^*(z,\gamma z')
\end{aligned}
$$

であった．第 2 の等式から Fourier 展開を導いたのだが，今度は第 1 の等式を用いる．

D, D' を負整数として，z, z' をそれぞれ判別式 D, D' の CM points とする．即ち

$$
\begin{cases}
az^2+bz+c=0, & a,b,c\in\boldsymbol{Z},\ (a,b,c)=1,\ b^2-4ac=D<0, \\
a'z^2+b'z+c'=0, & a',b',c'\in\boldsymbol{Z},\ (a',b',c')=1,\ b'^2-4a'c'=D'<0
\end{cases}
$$

で，$z = x+iy = -\dfrac{b}{2a}+i\dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$, $z' = x'+iy' = -\dfrac{b'}{2a'}+i\dfrac{\sqrt{|D'|}}{2a'}$．このとき

$$
\begin{aligned}
g_s(z,z') &= -2Q_{s-1}\left(1+\frac{|z-z'|^2}{2yy'}\right) \\
&= -2Q_{s-1}\left(\frac{-bb'+2ac'+2a'c}{\sqrt{DD'}}\right)
\end{aligned}
$$

今 $\mathfrak{Q} := \{Q = [a,b,c]; a,b,c \in \boldsymbol{Z}\} \cong \boldsymbol{Z}^3$ とし，$Q = [a,b,c]$, $Q' = [a',b',c']$ $\in \mathfrak{Q}$ に対し

$$B_\Delta(Q,Q') := bb' - 2ac' - 2a'c$$

と定義する．これは $\mathfrak{Q}$ 上の bilinear form であり，$B_\Delta(Q,Q) = b^2 - 4ac = \Delta(Q)$ (Q の判別式). $\Delta(Q) = D < 0$, $\Delta(Q') = D' < 0$ とし z_Q, z'_Q をそれぞれ $az^2 + bz + c = 0$, $a'z'^2 + b'z' + c' = 0$ の $\mathfrak{h}$ における（唯一の）根とするとき

$$g_s(z_Q, z'_Q) = -2Q_{s-1}\left(\frac{-B_\Delta(Q,Q')}{\sqrt{DD'}}\right)$$

である．$D < 0$ に対し

$$\mathfrak{Z}_D := \{z \in \mathfrak{h}; \exists a,b,c \in \boldsymbol{Z}, (a,b,c) = 1, b^2 - 4ac = D, az^2 + bz + c = 0\}$$

とおく ($|\mathfrak{Z}_D/\Gamma| = h(D) < \infty$)．すると

$$G_s(z_Q, z'_Q) = \sum_{\gamma \in \Gamma}\left(-2Q_{s-1}\left(\frac{-B_\Delta(Q, Q' \circ \gamma)}{\sqrt{DD'}}\right)\right)$$

より

$$\sum_{\substack{z \in \mathfrak{Z}_D/\Gamma \\ z' \in \mathfrak{Z}_{D'}/\Gamma}} G_s(z,z') = -2 \sum_{(Q,Q') \in (\mathfrak{Q}_D \times \mathfrak{Q}_{D'})/\Gamma} Q_{s-1}\left(\frac{-B_\Delta(Q,Q')}{\sqrt{DD'}}\right).$$

ここに

$$\mathfrak{Q}_D = \{Q = [a,b,c] \in \mathfrak{Q}; b^2 - 4ac = D\}.$$

$\mathfrak{Q}/\Gamma$ の代表系を $z_1, \cdots, z_{h(D)}$ とし $X = \mathfrak{h}/\Gamma$ 上の 0 次因子 P_D を

$$P_D := (z_1) + \cdots + (z_{h(D)}) - h(D)(\infty)$$

で定める (Heegner divisor, $\Gamma = \Gamma_0(N)$ の場合は 2 次形式にある mod N での条件をつけて同様に構成される)．2 つの P_D, $P_{D'}$ に対し “ Néron-Tate pairing の ∞ 成分 ”（の一般の k での類似物）

$$< P_D, P_{D'} >_\infty^{(k)} := \sum_{\substack{z \in \mathfrak{Z}_D/\Gamma \\ z' \in \mathfrak{Z}_{D'}/\Gamma}} G_k^{\mathfrak{h}/\Gamma}(z,z')$$

と定義すると，先の等式より

$$\begin{aligned} < P_D, P_{D'} >_\infty^{(k)} &= -2 \sum_{\substack{n\in Z \\ n>\sqrt{DD'}}} m_{D,D'}(n)\, Q_{k-1}\Big(\frac{n}{\sqrt{DD'}}\Big) \\ m_{D,D'}(n) &= \sharp\{(Q,Q') \in (\Omega_D \times \Omega_{D'})/\Gamma\,;\, B_D(Q,Q') = -n\} \end{aligned}$$

となる．これが実際計算されて (cf. Th. II.2)

Theorem II.11 ($\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$) $k = 3, 5, 7$ ($\Leftrightarrow$ odd かつ $S_{2k} = \{0\}$) とすると

$$< P_D, P_{D'} >_\infty^{(k)} = \frac{1}{(DD')^{\frac{k-1}{2}}} \log(\text{有理数})$$

$< P_D, P_{D'} >_\infty^{(k)}$ は $G_k(z,z')$ の和なのだが，その各々については

Conjecture 各 $G_k(z,z')$, ($z \in \mathfrak{Z}_D/\Gamma$, $z' \in \mathfrak{Z}_{D'}/\Gamma$) は $\dfrac{1}{(DD')^{\frac{k-1}{2}}} \log(\alpha^\sigma)$, ($\alpha \in$ ある類体, $\sigma \in \mathrm{Gal}$) の形をしているであろう.

一般には

Theorem II.12 ([4], $\Gamma = \Gamma_0(N)$), k, N 任意

$$\begin{aligned} (\text{定数}) \qquad &\times \sum_{\substack{f\in S_{2k}(\Gamma_0(N))^- \\ \text{Hecke}}} L'(f,k)\,\frac{C_{\tilde f}(D)\,C_{\tilde f}(D')}{(\tilde f, \tilde f)} \\ &= \; < P_D, P_{D'} >_{\infty,\Gamma_0(N)}^{(k)} + \frac{1}{(DD')^{\frac{k-1}{2}}} \sum_p m_p \log p \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} f \in S_{2k}(\Gamma_0(N))^- \;&\Longleftrightarrow\; L^*(f,s) = -L^*(f, 2k-s) \\ (\;&\Longrightarrow\; L(f,k) = 0 \;\;) \end{aligned}$$

で $C_{\tilde f}(D)$ は f の志村対応

$$\begin{aligned} S_{2k}(\Gamma_0(N)) \;&\longrightarrow\; M_{k+\frac12} \\ f \;&\longmapsto\; \tilde f = \sum C_{\tilde f}(D) q^D \end{aligned}$$

による像 $\tilde f$ の Fourier 係数，$m_p = m_p(D, D', k)$ はある整数で

$$p \gg 1 \Longrightarrow m_p = 0\,.$$

Corollary II.13 $S_{2k}(\Gamma_0(N)) = \{0\}$ ならば

$$< P_D, P_{D'} >^{(k)}_{\infty,\Gamma_0(N)} = \frac{1}{(DD')^{\frac{k-1}{2}}} \log(\text{有理数}) .$$

Remark $k=1$ のときの Th. II.12 の右辺が丁度 $Jac_X(\boldsymbol{Q})$ 上の Néron-Tate height pairing $< P_D, P_{D'} >$ である.

一般に $k=1$, $S_2 \neq 0$ のとき Hecke 環 $\boldsymbol{T}$ の作用で S_2 を $S_2 = \oplus < f >$ と固有空間分解し対応する Jacobian の分解を $J_X = \oplus J_X^{(f)}$ とする. $[D] \in J_X$ の f 成分を $[D]^{(f)}$ とすると

$$< [P_D]^{(f)}, [P_{D'}]^{(f)} > = (\text{定数}) \times L'(f,1)\, C_{\tilde{f}}(D)\, C_{\tilde{f}}(D')$$

が成り立つ. このことから

Corollary II.14 $[P_D]^{(f)}$ は D によらず, $J_X(\boldsymbol{Q}) \otimes \boldsymbol{C}$ のある一次元部分空間に含まれる. 実際 D に無関係な P_0 が存在し $[P_D]^{(f)} = C_{\tilde{f}}(D) P_0$.

Proof. 一般に内積空間 $(V, <\,,\,>)$ のある元の系 x_i に対し $n_i \in \boldsymbol{R}$ が定まって$< x_i, x_j > = c\, n_i n_j$, $(\forall i, j)$ となっているとき Cauchy の不等式で等号が成り立つ : $< x_i, x_j >^2 = < x_i, x_i > \cdot < x_j, x_j >$. 従って, ある x_0 があり $x_i = n_i x_0$, $(\forall i)$. 証明終わり.

今 $\sum_{D>0} C_{\tilde{f}}(D) q^D \in M_{\frac{3}{2}}$ であるから, Cor. II.14 より

$$\sum_{D>0} [P_D] q^D \in J_X(\boldsymbol{Q}) \otimes M_{\frac{3}{2}} .$$

Example II.3 $k=1$, $\Gamma = PSL_2(\boldsymbol{Z})$, $G_1(z,z') = \log|j(z) - j(z')|^2$. この場合次の量

$$\sum_{\substack{z \in \mathfrak{Z}_D/\Gamma, \\ z' \in \mathfrak{Z}_{D'}/\Gamma}} \log|j(z) - j(z')|^2 = \log N(\alpha - \beta)^2,$$

$$\alpha = j\left(\frac{D+\sqrt{D}}{2}\right) \in \mathcal{H}_D, \quad \beta = j\left(\frac{D'+\sqrt{D'}}{2}\right) \in \mathcal{H}_{D'}$$

(D, D' は虚 2 次体の判別式, $(D, D') = 1$, とする. $\mathcal{H}_D$, $\mathcal{H}_{D'}$ は$\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D'})$ の Hilbert 類体) の explicit な公式が得られる.

例えば，$p > p' > 3$ を 2 つの素数で $p \equiv p' \equiv 3 \pmod 4$ なるものとし，$D = -p$, $D' = -p'$ とする．$\left(\dfrac{n}{p}\right) = -1$ なる n に対し

$$\varphi_p(n) := -\sum_{d|n}\left(\frac{d}{p}\right)\log d$$

と定義する．

Exercise : $\varphi_p(n) = \begin{cases} (\text{整数}) \times \log q & (q \text{ は } n \text{ を割る素数 }) \\ 0 \end{cases}$

より詳しくは，$\left(\dfrac{n}{p}\right) = -1$ より n の素因子 q で $\left(\dfrac{q}{p}\right) = -1$ かつ $\mathrm{ord}_q(n)$ が奇数となるものが少なくとも 1 つ (奇数個) あるが，それが唯 1 つの場合 $\varphi_p(n) = (\text{整数}) \times \log q$ となり，3 つ以上ある時は 0 となる．

Hint :

$$\begin{aligned} \varphi_p(n) &= \frac{d}{ds}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{d}{p}\right)d^{-s}\right)\Bigg|_{s=0} \\ \sum_{d|n}\left(\frac{d}{p}\right)d^{-s} &= \prod_{\substack{q|n \\ q^r \| n}}\left(1 + \left(\frac{q}{p}\right)q^{-s} + \cdots \left(\frac{q^r}{p}\right)q^{-rs}\right) \end{aligned}$$

さてこのとき (Gross-Zagier [6])

$$\sum_{\substack{z \in \mathfrak{Z}_{-p}/\Gamma \\ z' \in \mathfrak{Z}_{-p'}/\Gamma}} \log|j(z) - j(z')| = \sum_{\substack{0 < x < \sqrt{pp'} \\ x:\mathrm{odd}}} \varphi_p\left(\frac{pp' - x^2}{4}\right).$$

Example II.4 $p = 11$, $p' = 7$ のとき $|\mathfrak{Z}_{-11}/\Gamma| = |\mathfrak{Z}_{-7}/\Gamma| = 1$.

$$j\left(\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\right) = -2^{15} = -32768\,, \quad j\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right) = -15^3 = -3375$$

より

$$\left|j\left(\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\right) - j\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)\right| = 29393 = 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19\,.$$

従って

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{\substack{0 < x < 8.77\cdots \\ x:\mathrm{odd}}} \varphi_{11}\left(\frac{77 - x^2}{4}\right) \\ &= \varphi_{11}(19) + \varphi_{11}(17) + \varphi_{11}(13) + \varphi_{11}(7) \\ &= \log 19 + \log 17 + \log 13 + \log 7\,. \end{aligned}$$

Corollary II.15 $N(j(z)-j(z'))$ は " highly factored ". 即ちすべての素因子は $\dfrac{pp'}{4}$ より小さい(それに比して $N(j(z)-j(z'))$ 自身は非常に大きな数となる).

Example II.5 $p=67,\ p'=7\ j=-2^{15}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 11^3,\ j'=-3^3\cdot 5^3$, $|j-j'|=3^7\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 61\cdot 97$.

x	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$n=\frac{67\cdot 7-x^2}{4}$	$3^2\cdot 13$	$5\cdot 23$	$3\cdot 37$	$3\cdot 5\cdot 7$	97	$3\cdot 29$	$3\cdot 5^2$	61	$3^2\cdot 5$	3^3	7
$e^{\varphi_{67}(n)}$	13	5^2	3^2	1	97	3^2	3	61	5	3^2	7

Example II.6 $k=3,\ \Gamma=PSL_2(\boldsymbol{Z}),\ D=-p,\ D'=-p'$ は先の通り.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{z\in\mathfrak{Z}_{-p}/\Gamma\\ z'\in\mathfrak{Z}_{-p'}/\Gamma}} G_3(z,z') &= \frac{1}{pp'}\sum_{\substack{0<x<\sqrt{pp'}\\ x:\mathrm{odd}}}(x^2-pp')\,\varphi_p\Bigl(\frac{pp'-x^2}{4}\Bigr)\\ &= \frac{1}{pp'}\log(n_3)\,.\end{aligned}$$

n_3 に現われる素因子は $N(j(z)-j(z'))$ に現われるものと同じになる.

先の予想 : $k=\mathrm{odd}$ で $S_{2k}=\{0\}$ のとき各 $G_k(z,z')$ は $\dfrac{1}{(DD')^{\frac{k-1}{2}}}\log|\alpha^\sigma|$, ($\alpha$ はある類体の数) という形であろう, を数値的に確かめるには次のようにする.

まず, Th. II.11 より $N(\alpha)=n_k$ はわかっているから単項イデアル (α) の素イデアル分解 $(\alpha)=\prod \mathfrak{q}_i^{r_i}$ (の何通りかの可能性) が得られる. そこで実際右辺のイデアルをとってそれが単項イデアル (α_0) であることを確かめる. すると, ある単数 ε_0 があって $\alpha=\varepsilon_0\alpha_0$ のはずである. 予想が正しければ

$$\log|\varepsilon_0^\sigma| = -\log|\alpha_0^\sigma| + (DD')^{\frac{k-1}{2}}\,G_k(z,z')\,.$$

この右辺は数値的に計算できる. 単数群は $(\log|\varepsilon^\sigma|)_\sigma$ によって $\boldsymbol{R}^{r_1+r_2-1}$ 内の lattice Λ に埋め込まれているから, 上で計算した $(\log|\varepsilon_0^\sigma|)_\sigma$ がこの lattice 上にのっていれば, 実際の単数 ε_0 を見つけ出すことができて求める $\alpha=\varepsilon_0\alpha_0$ が得られる.

次に $S_{2k}(\Gamma)=0$，($\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$) の場合に CM points z, z' (判別式 D, D') に対し

$$G_k(z,z')=\frac{1}{(DD')^{\frac{k-1}{2}}}\log(\alpha_{z,z'})$$

となるような $\alpha_{z,z'}\in\boldsymbol{C}$（予想としては $\in\overline{\boldsymbol{Q}}$ ）を canonical に構成する方法を述べる．

Part I において，判別式 $D>0$ の 2 次形式のΓ-同値類 $\mathcal{A}$ に対して次のものを考えた．

- $f_{k,\mathcal{A}}(z)=\sum_{Q\in\mathcal{A}}\frac{1}{Q(z)^k}\in S_{2k}(\Gamma)$
- $r^{\pm}(f^{\pm}_{k,\mathcal{A}})\in W^{Q}_{2k}$

$f_{k,\mathcal{A}}$ は下で述べるように“あるサイクル上の積分”の dual になっている．$\mathcal{A}\ni Q=[a,b,c]$ とし $ax^2+bx+c=0$ の 2 実根を α_Q, α'_Q とする．$\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ の基本単数に対応する，α_Q, α'_Q を固定する $\gamma\in\Gamma$ が存在する．α_Q と α'_Q を結ぶ測地線上に z_0 をとり，測地線上の z_0 から γz_0 までの積分 (cycle integral)

$$r_{k,\mathcal{A}}(f):=\int_{z_0}^{\gamma z_0}f(z)Q(z)^{k-1}dz\,,\qquad (f\in S_{2k})$$

を考えると，これは Q 及び z_0 のとり方に依らないことがわかる．そして

$$r_{k,\mathcal{A}}(f)=(f,f_{k,\mathcal{A}})$$

が成り立つ．今度は $D<0$ とする．2 根のうち上半平面にある方を $\alpha_Q=z_Q\in\mathfrak{H}$ とし

$$r_{k,\mathcal{A}}(f):=\int_{z_Q}^{\infty}f(z)Q(z)^{k-1}dz$$

と定義する．又 $f_{k,\mathcal{A}}(z)$ も同様に

$$f_{k,\mathcal{A}}(z):=\sum_{Q\in\mathcal{A}}\frac{1}{Q(z)^k}$$

で定義すると z_Q で極をもち $f_{k,\mathcal{A}}\in S^{\mathrm{mero}}_{2k}$ である．又 z_Q での主要部は Part I の記号で $q_{k,z_Q}(z)$ となる．さて $k\geq 1$ とし $z=z_Q$, $z'=z_{Q'}$ を判別式 D, D' の CM points, $[Q]=\mathcal{A}$, $[Q']=\mathcal{A}'$ とする．これに対し

$$r_k(z,z'):=r_{k,\mathcal{A}}(f_{k,\mathcal{A}'})=\int_{z_Q}^{\infty}\Big(\sum_{Q'\in\mathcal{A}'}\frac{1}{Q'(z)^k}\Big)Q(z)^{k-1}dz$$

と定義する．$f_{k,A}$ は $z_{Q'}$ の Γ -orbit に極をもつからこの積分は mod $2\pi i\times$ (residues) でしか決まらないが，実は $(DD')^{\frac{k-1}{2}}r_k(z,z')$ は mod $2\pi i\boldsymbol{Z}$ で well-defined である．従って

$$\alpha_k(z,z') := e^{(DD')^{\frac{k-1}{2}}r_k(z,z')} \in \boldsymbol{C}^\times$$

が意味をもち，これが求める $\alpha_{z,z'}$ である．

15 Arakelov Green 関数との関係

再び $k=1$ の場合を考える．関数 $G_1(z,z')$ は z' を固定したとき

- z について harmonic
- z' において log-res 1 の simple log-pole をもつ他は non-singular

なるものだったが，コンパクト Riemann 面 X 上にはこのような関数は存在しないのであった．ここにより良い関数 $G_A(z,z')$ (Arakelov Green 関数) があって，X を genus $g>0$ とすれば次の条件で定数差を除き一意に定まる（$g=0$ のときは別の与え方をする cf.[1] [3]）．

- $z=z'$ で留数 1 の log-sing.
- $\Delta_z G_A = -\dfrac{4\pi}{g}\displaystyle\sum_{j=1}^{g}|\omega_j|^2$.

ここに $\omega_1,\cdots,\omega_g$ は X 上の第 1 種微分の正規直交系 (内積 $<\omega,\omega'> = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int_X \omega\wedge\omega'$）．

Problem II.1 $X=\overline{\mathfrak{h}/\Gamma}$ に対し $G_A(z,z')$ を見い出すこと．

答えは次の通り：

$$G_1(z,z') = \lim_{s\to 1}\left(G_s^{\mathfrak{h}/\Gamma}(z,z') + \frac{4\pi\kappa}{s-1}\right)$$

とおく．ここに $\kappa = \dfrac{1}{\mathrm{Vol}(\mathfrak{h}/\Gamma)}$．（$G_s^{\mathfrak{h}/\Gamma}(z,z')$ は $s=1$ で留数 $-4\pi\kappa$ の一位の極をもつ）．

Theorem II.16

$$G_A(z,z') = G_1(z,z') - \frac{1}{2g}[G(z)+G(z')].$$

但し

$$\begin{aligned} G(z) &= \lim_{z'\to z}[G_1(z,z') - g_1(z,z')] - \sum_{P:\text{elliptic}} (1-\frac{1}{n_P})G_1(z,P) \\ &\quad + 4\pi \sum_{C:\text{cusp}} E_C(z) \quad (+\text{定数}) \end{aligned}$$

ここで $g_1(z,z') = \log\left|\frac{z-z'}{z-\bar{z'}}\right|^2$, P は Γ の elliptic fixed point の代表系を動き n_P は stabilizer の位数, C は cusp で, $E_C(z,s)$ をそれに付随する Eisenstein 級数とするとき $E_C(z) = \lim_{s\to 1}\left(E_C(z,s) + \frac{4\pi\kappa}{s-1}\right)$.

参考文献

[1] S. Arakelov. Intersection theory of divisors on an arithmetic surface. *Math. USSR Izvestija*, 8(6):1167–1180, 1974.

[2] YJ. Choie and D. Zagier. Rational period functions for PSL(2,**Z**). To appear in a volume in honor of E. Grosswald, published by the AMS.

[3] G. Faltings. Calculus on arithmetic surfaces. *Ann. of Math.*, 119:387–424, 1984.

[4] B. Gross, W. Kohnen, and D. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series II. *Math. Ann.*, 278:497–562, 1987.

[5] B. Gross and D. Zagier. Heegner points and derivatives of L-series. *Invent. Math*, 84:225–320, 1986.

[6] B. Gross and D. Zagier. On singular moduli. *J. Reine Angew. Math.*, 355:191–220, 1985.

[7] K. Haberland. Perioden von Modulformen einer Variablen und Gruppenkohomologie. *Math. Nachr.*, 112:245–282, 1983.

[8] M. Knopp. Rational period functions of the modular group. *Duke Math. J.*, 45:47–62, 1978.

[9] W. Kohnen and D. Zagier. Modular forms with rational periods. In R.A. Rankin, editor, *Modular Forms*, Ellis Horwood Limited, 1984.

[10] Yu. Manin. Periods of parabolic forms and p-adic Hecke series. *Mat. Sb.*, 21:371–393, 1973.

[11] L.J. Mordell. *Diophantine equations.* Academic Press, London, 1969.

[12] D. Mumford. *Tata Lectures on Theta I.* Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart, 1983.

[13] D. Zagier. Hecke operators and periods of modular forms. *Festschrift in honor of I.I. Piatetski-Shapiro, Israel Mathematical Conference Proceedings*, 3:321–336, 1990.

[14] D. Zagier. Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. In J.-P. Serre and D. Zagier, editors, *Modular Functions of One Variable VI,Lecture notes in Math. 627*, Springer-Verlag, 1976.

[15] D. Zagier. Periods of modular forms and Jacobi theta functions. *Invent. Math.*, 104:449–465, 1991.

[16] D. Zagier. The Rankin-Selberg method for automorphic functions which are not of rapid decay. *J.Fac.Sci. Tokyo*, 28:415–438, 1982.