素数定理的一个简单证明*)

——介绍Korevaar的工作——

D.Zagier

我现在向大家介绍近来Korevaar所给出的素数定理的一个简单证明．令

$$\pi(x)=\#\{\,p\mid p\leqslant x\,\},$$

素数定理是说：$\pi(x)\sim x/\log x$ （$x\to\infty$时），这里(和以后) log 均指自然对数．令

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & 如果\ n=p^r,\ r\geqslant 1,\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n).$$

引理1 由$\psi(x)\sim x$ （$x\to\infty$时）可推出素数定理．

证 （参见华罗庚著《数论导引》第九章定理1）．首先有

$$\psi(x)\leqslant\sum_{p\leqslant x}\frac{\log x}{\log p}\log p=\pi(x)\log x, \tag{1}$$

从而 $\varliminf\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)}{x/\log x}\geqslant\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\psi(x)}{x}=1$．另一方面，对于$0<\alpha<1$，$x>1$，我们有

$$\psi(x)\geqslant\sum_{x^\alpha<p\leqslant x}\log p\geqslant\{\pi(x)-\pi(x^\alpha)\}\log x^\alpha\geqslant\alpha(\pi(x)-x^\alpha)\log x,$$

从而

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}\leqslant\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha\log x}{x}=\frac{1}{\alpha}.$$

令$\alpha\to1$，于是 $\varlimsup\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)}{x/\log x}\leqslant1$．将两者合并即得素数定理．

引理2 $\psi(x)=O(x)$

证 首先我们有

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)}<\prod_{n<p\leqslant 2n}p\leqslant\binom{2n}{n}\leqslant(1+1)^{2n}=4^n.$$

从而$\pi(2n)-\pi(n)\leqslant n\log 4/\log n$．特别取$n=2^k$，则有

$$\pi(2^{k+1})-\pi(2^k)\leqslant 2^{k+1}/k$$

---

* 这是D.Zagier教授于1982年3月24日在应用数学研究所的演讲．

但是，易知$\pi(2^{k+1})\leqslant 2^k$，从而

$$(k+1)\pi(2^{k+1})-k\pi(2^k)\leqslant\pi(2^{k+1})+k(\pi(2^{k+1})-\pi(2^k))\leqslant 2^k+2^{k+1}=3\cdot 2^k$$

在上式中取 $k=0,1,\cdots,l$ 然后相加，即得

$$(l+1)\pi(2^{l+1})\leqslant 3(2^0+2^1+\cdots+2^l)<3\cdot 2^{l+1}$$

即$\pi(2^{l+1})<3\cdot 2^{l+1}/_{l+1}$。对于任意$x\geqslant 2$，令$2^l\leqslant x<2^{l+1}$，则

$$\pi(x)<\pi(2^{l+1})<3\cdot 2^{l+1}/l+1\leqslant 6x/(\log x/\log 2)=x\log 64/\log x.$$

最后由引理 1 证明中的(1)式即得本引理。

引理3 如果$\int_1^\infty\frac{\phi(t)-t}{t^2}dt$收敛，则$\phi(x)\sim x$(当$x\to\infty$时)。

证 用反证法．假如$\frac{\phi(x)}{x}\not\mapsto 1$，则或者存在$c>1$，和$x_n\to+\infty$，使得$\phi(x_n)\geqslant cx_n$ $(n=1,2,\cdots)$；或者存在$c<1$和$x_n\to+\infty$，使得$\phi(x_n)\leqslant cx_n(n=1,2,\cdots)$。对于第一种情形，由于$\phi(x)$是递增函数，从而

$$\int_{x_n}^{cx_n}\frac{\phi(t)-t}{t^2}dt\geqslant\int_{x_n}^{cx_n}\frac{cx_n-t}{t^2}dt=(c-1)-\log c>0$$

此式对于$n=1,2,\cdots$均成立。这就与$\int_1^\infty\frac{\phi(t)-t}{t^2}dt$收敛的假设相矛盾。类似地，对于第二种情形，我们有

$$\int_{cx_n}^{x_n}\frac{\phi(t)-t}{t^2}dt\leqslant\int_{cx_n}^{x_n}\frac{cx_n-t}{t^2}dt=1-c+\log c<0\quad(n=1,2,\cdots),$$

这同样导致矛盾。

引理4 令$\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}(\mathrm{Re}\,(s)>1)$.则$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$在$\mathrm{Re}\,(s)>0$中解析。

引理5 当$t\neq 0$时，$\zeta(1+it)\neq 0$。

以上二引理的证明参见《数论导引》第236—238页，此处从略。

引理6 $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=s\int_1^\infty\frac{\phi(t)}{t^{s+1}}dt\qquad(\mathrm{Re}\,(s)>1\text{时})$

证 由于$\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$，从而

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_p p^{-s}\log p/(1-p^{-s})=\sum_{p,r}\frac{\log p}{p^{rs}}=\sum_{n=1}^\infty\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

另一方面

$$\int_1^\infty\frac{\phi(t)dt}{t^{s+1}}=\int_1^\infty\sum_{n\leqslant t}\Lambda(n)\frac{dt}{t^{s+1}}=\sum_{n=1}^\infty\Lambda(n)\int_n^\infty\frac{dt}{t^{s+1}}=s^{-1}\sum_{n=1}^\infty\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

将两式合在一起即得引理。

现在叙述我们的主要工具：分析引理，它相当于某种Tauber型定理。

分析引理 假设$f(t)$为实变实值函数，并且

(a) 当$t\geqslant 1$时，　　$|f(t)|\leqslant M/t$；

(b) $g(s)=\int_1^\infty \frac{f(t)}{t^s}dt$ $(\mathrm{Re}(s)>0)$可以解析延拓到$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$。

则积分$\int_1^\infty f(t)dt$收敛(并且等于$g(0)$)。

我们先由此证明素数定理：在分析引理中取$f(t)=\frac{\phi(t)-t}{t^2}$。由引理2可知条件(a)成立。另一方面，当$\mathrm{Re}(s)>0$时，利用引理6我们有

$$g(s)=\int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t^{s+2}}dt-\int_1^\infty \frac{1}{t^{s+1}}dt=-\frac{1}{s+1}\frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)}-\frac{1}{s}. \qquad (2)$$

从引理5可知$g(s)$在$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$，$s\neq 0$时无极点。而在$s=0$处，由引理4知

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=(\log\frac{1}{s-1})'+\cdots=-\frac{1}{s-1}+\cdots,$$

于是由(2)式即知$\operatorname*{res}\limits_{s=0} g(s)=-1\cdot(-1)-1=0$。从而$g(s)$在$s=0$处也无奇异性。所以条件(b)也成立。根据分析引理，$\int_1^\infty f(t)dt=\int_1^\infty \frac{\phi(t)-t}{t^2}dt$收敛。再由引理3和引理1即得素数定理。

最后我们证明分析引理。对于$x\geqslant 1$定义

$$g_x(s)=\int_1^x f(t)t^{-s}dt.$$

我们只需证明当$x\to+\infty$时$g_x(0)\to g(0)$即可。注意$g_x(s)$是整个s-复平面上的整函数。而条件(b)保证$g(s)$在$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$中解析。特别地，对于每个实值$\tau$，$g(s)$都在点$s=i\tau$的某个小邻域中正则。从而对于每个$R>0$，均存在某个充分小的$h>0$，使得$(g_x(s)-g(s))$在图1所示的围道$C$内正则，于是由Cauchy定理我们有

$$\begin{aligned}g_x(0)-g(0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{s}(g_x(s)-g(s))x^s(1+s^2/R^2)ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\Big[\int_{C_1}(g_x(s)-g(s))x^s\cdot\frac{R^2+s^2}{R^2 s}ds\\&\quad+\int_{C_2}g_x(s)x^s\frac{R^2+s^2}{R^2 s}ds-\int_{C_3}g(s)x^s\frac{R^2+s^2}{R^2 s}ds\Big]\\&=\frac{1}{2\pi i}[\mathrm{I}+\mathrm{II}-\mathrm{III}],\end{aligned}$$

其中积分曲线C_1,C_2和C_3分别如图2—4所示

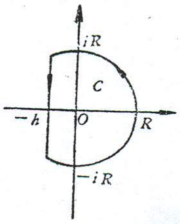

图 1

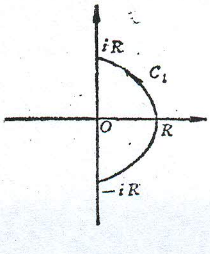

图 2

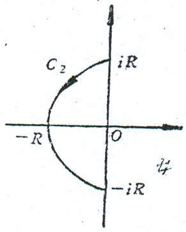

图 3

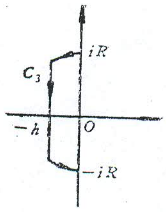

图 4

先考虑Ⅰ和Ⅱ. 在C_1上当$\sigma=\mathrm{Re}(s)>0$时，我们有$|x^s|=x^\sigma$，$\left|\dfrac{R^2+s^2}{R^2s}\right|=\dfrac{2\sigma}{R^2}$ 并且

$$\left|g_x(s)-g(s)\right|=\left|\int_x^\infty\frac{f(t)}{t^s}dt\right|\leqslant\int_x^\infty\frac{M}{t^{\sigma+1}}dt=\frac{M}{\sigma}x^{-\sigma},$$

从而在C_1上

$$\left|x^s(g_x(s)-g(s))\frac{s^2+R^2}{R^2s}\right|\leqslant\frac{2M}{R^2}, \tag{3}$$

取极限可知它对于$s=\pm iR$也成立。类似地，在C_2上当$\sigma=\mathrm{Re}(s)<0$时，$|x^s|=x^\sigma$，$|g_x(s)|=\left|\int_1^x\dfrac{f(t)}{t^s}dt\right|\leqslant\int_1^x\dfrac{M}{t^{\sigma+1}}dt\leqslant\dfrac{M}{\sigma}x^{-\sigma}$。从而

$$\left|x^sg(s)\frac{s^2+R^2}{R^2s}\right|\leqslant\frac{2M}{R^2}, \tag{4}$$

于是由(3)和(4)式可知

$$|\mathrm{I}+\mathrm{II}|\leqslant\int_{|s|=R}\frac{2M}{R^2}|ds|=\frac{4\pi M}{R}\to 0\quad(\text{当}R\to\infty\text{时}).$$

现在对于固定的R考虑Ⅲ。这时$g(s)$在C_3上是有界的，假设$|g(s)|\leqslant N$. 在C_3的两段弧上，由于$\mathrm{Re}(s)\leqslant 0$，从而$|x^s|\leqslant 1$，由于$s=Re^{i\theta}$，从而

$$\left|\frac{R^2+s^2}{R^2s}\right|=\frac{1}{R}|e^{i\theta}+e^{-i\theta}|\leqslant\frac{2}{R}.\ \text{因此}\left|g(s)x^s\frac{R^2+s^2}{R^2s}\right|\leqslant\frac{2N}{R}$$

而每段弧长为$R\cdot\sin^{-1}\dfrac{h}{k}\sim h$，从而取$h$适当小，就可使在$C_3$两段弧上的积分的绝对值任意小。最后考虑$C_3$的垂直线上的积分。这时$\mathrm{Re}(s)=-h$。从而这部分积分的贡献是

$$\leqslant\int_{-h+Ri}^{-h-Ri}\left|g(s)\frac{R^2+s^2}{R^2s}\right|x^{-h}|ds|\leqslant Nx^{-h}\int_{-R}^{R}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+t^2}}+\frac{\sqrt{h^2+t^2}}{R^2}\right)dt.$$

当h和R均取定之后，令$X\to+\infty$，则上式$\to 0$。因此对于任意给定的R，可取充分小的h，然后再取充分大的X，使得Ⅲ的贡献任意小。这就证明了分析引理。

（**冯克勤**整理　**王　元**校）