什么是模形式?※)

D. Zagier

模形式理论是单复变函数理论研究中的一个专门的论题，所以是分析学的一个分支．但是它和数论、群表示论以及代数几何有着许多深刻的关系．基于这些联系，许多数学家，包括本世纪一些大数学家都研究过模形式．它和数论的关系是最容易解释的，这是我今天演讲的内容．利用模形式，人们可以得到数论函数之间许多非常新奇的恒等式，这些恒等式当中有许多是不能用其他方法得到的．开始我先给出一些例子．

例 1 令$r_4(n)$为 n 表示成四个整数之平方和的表法数，于是

$$
\begin{aligned}
&r_4(1)=8 && (1=(\pm1)^2+0+0+0, && 4\text{ 个置换}\times 2\text{ 个符号}),\\
&r_4(2)=24 && (2=(\pm1)^2+(\pm1)^2+0+0, && 6\text{ 个置换}\times 4\text{ 个符号}),\\
&r_4(3)=32 && (3=(\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2+0, && 4\text{ 个置换}\times 8\text{ 个符号}),\\
&r_4(4)=24 && (4=(\pm2)^2+0+0+0=(\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2+(\pm1)^2\ ),\\
&r_4(5)=48 && (5=(\pm2)^2+(\pm1)^2+0+0\ ).
\end{aligned}
$$

Euler 和 Lagrange 证明了，对于每个自然数 n 均有 $r_4(n)>0$。事实上，我们有**公式**

$$r_4(n)=8\sum_{\substack{d\mid n\\ 4\nmid d}} d.$$

类似地，令 $r_8(n)$为自然数 n 表成八个整数的平方和的表法数，我们有

$$r_8(n)=16\sum_{d\mid n}(-1)^{n-d}d^3.$$

这些关系式很古老，也很吸引人．但是确实没有容易的办法来证明它们．然而在模形式理论中可以对这些公式作切实的解释．

例 2 利用下面的展开式来定义数 $\tau(n)$：

$$\tau(1)x+\tau(2)x^2+\tau(3)x^3+\cdots=x(1-x)^{24}(1-x^2)^{24}(1-x^3)^{24}\cdots,$$

这个定义看起来很奇怪，但是等式右边在椭圆函数理论中是基本的函数之一，因此是很自然的。它的前几个值为

n	1	2	3	4	5	6
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048

※） 本文是美国马里兰大学和西德波恩大学教授 D.Zagier 于 1982 年 3 月底在北京数学会与中国科学院数学研究所联合举办的报告会上所作的演讲．

并且τ满足

$$(*)\begin{cases}\tau(p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_n^{r_n})=\tau(p_1^{r_1})\tau(p_2^{r_2})\cdots\tau(p_n^{r_n}) & (\text{即}\tau\text{是“积性”的}),\\ \tau(p^2)=\tau(p)^2-p^{11},\tau(p^3)=\tau(p)^3-2p^{11}\tau(p),\text{对于}\tau(p^4)\text{等等有类似的公式。}\end{cases}$$

Ramanujan 于 1916 年猜想出这些公式。Mordell 于次年证明了它们。随后 Hecke 于本世纪二十年代和三十年代作了推广，并且发展成理论。我们不久将叙述 Hecke 的推广。

我们对上述那些奇怪的恒等式($*$)作出解释，是基于函数$x\Pi(1-x^n)^{24}$的如下一个值得注意的性质：

定理 对于$z\in\mathbb{C}$，$\mathrm{Im}(z)>0$，定义

$$\triangle(z)=e^{2\pi iz}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi inz})^{24},$$

则对于满足$ad-bc=1$的任意整数a,b,c,d，均有

$$\triangle\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^{12}\triangle(z)。$$

这个定理来源于椭圆函数理论，我们在这里不给出证明(目前已有许多证明，其中包括 Siegel 给出的一个非常简短的证明，只用到 Cauchy 留数公式[1])。这个性质正是说：$\triangle(z)$是模形式。

我们令

$$\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Im}(z)>0\},$$

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ ad-bc=1\right\}.$$

定义 模形式是一个函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e^{2\pi inz}\qquad(z\in\mathbb{H}),$$

并且满足

$$(**)\quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^kf(z)\qquad\left(\text{对于每个}z\in\mathbb{H}\text{和}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\right).$$

其中k是某个整数，叫作是模形式f的**权**。如果它的系数$a(n)$满足恒等式($*$)(但是11要改成$k-1$)，我们称f为 **Hecke 形式**。我们以M_k表示全体权k的模形式所组成的集合。显然M_k是(复数域上的)向量空间。注意当k是奇数时，则$M_k=\{0\}$，这是因为取$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$可知$f(z)=(-1)^kf(z)$。

定理 向量空间M_k是有限维的，并且它的维数是

---

1) C.L.Siegel, A Simple Proof of $\eta(1-\frac{1}{\tau})=\eta(\tau)\sqrt{\frac{\tau}{i}}$, Mathematika, 1 (1954), p.4。——译者。

$$\dim M_k = d_k = \begin{cases} 0, & \text{当 } k=2\text{时;} \\ 1, & \text{当 } k=0,4,6,8,10\text{时;} \\ d_{k-12}+1, & \text{当 } k\geqslant 12\text{时.} \end{cases}$$

k	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
d_k	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2

这个定理是不难的，后面我们将给出证明。

Hecke 理论中的最重要财富是下述定理

定理 (Hecke)[1] (i)M_k中的 Hecke 形式构成一组基。即恰好存在 d_k 个权 k 的 Hecke形式，并且它们是线性无关的；

(ii)Hecke 形式的系数 $a(n)$均是代数数。

事实上，$a(n)$均是某个代数数域中的代数整数(当$k<24$时这个代数数域可取为 Q。而对 $k=24$ 则是 $\mathbb{Q}(\sqrt{144169})$)。

注意对于一个 Hecke 形式，只要知道了 $a(p)$(p 过全体素数)，我们便可以(由 (*) 式)得到所有的系数$a(n)$。而 $a(p)$是很神秘的，对于它我们基本上只知道：

定理 设 f 是权 k 的 Hecke 形式，系数为 $a(n)$，并且 $a(0)=0$，则对于每个素数 p 均有

$$|a(p)|\leqslant 2p^{\frac{k-1}{2}}.$$

这是由 Ramanujan 首先对于 $\tau(p)$ 作了上述猜想，后来 Petersson 将猜想推广到任意 Hecke 形式上去。它是由 Deligne 于1974 年证明的。这可能是迄今所证明的最困难的定理。

现在我们给出另一些模形式的例子。令

$$f(z)=\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{1}{(mz+n)^4},\qquad z\in\mathbb{H}$$

这个级数绝对收敛.如果 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma$，则

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\sum_{(m,n)}\frac{1}{\left(m\dfrac{az+b}{cz+d}+n\right)^4}=\sum_{(m',n')}\frac{1}{\left(\dfrac{m'z+n'}{cz+d}\right)^4}=(cz+d)^4f(z),$$

其中$\begin{pmatrix}m'\\n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}$。从而 $f\in M_4$。但是

$$f(z)=\sum_{m=0}+2\sum_{m>0}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(mz+n)^4},$$

而

1) 此定理中的 Hecke 形式均指“规范化”了的. 例如,规定它的第一个系数是 1 . ——译者.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^4} = \frac{(2\pi i)^4}{3!} \sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2\pi r i z}.$$

（后一公式是 Poisson 求和公式的特殊情形。而 Poisson 求和公式告诉我们如何将任意函数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(z+n)$ 作 Fourier 展开 $\sum c_r e^{2\pi i r z}$）。从而

$$f(z) = 2\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right) + 2\frac{16\pi^4}{6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2\pi i r z}.$$

$$= 2\zeta(4) + \frac{16\pi^4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi n i z}.$$

因此数 $\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3$ 是一个模形式的 Fourier 系数。利用同样的推理方法可以证明

定理 令

$$G_k(z) = c_k + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z}, \qquad z \in \mathbb{H},$$

其中 $k\geqslant 4$ 并且 k 是偶数，$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$，而

$$c_k = (-1)^{k/2} \frac{(k-1)!}{(2\pi)^k}\left(1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\right),$$

则 $G_k(z) \in M_k$。

（这里我们需要 $k\geqslant 4$ 以保证级数绝对收敛，从而可以将 $\pm(m,n)$ 放在一起。）

练习 求证系数 $\sigma_{k-1}(n)$ 满足（$*$）式（11改成 $k-1$）。从而 G_k 为 Hecke形式。

现在我们来证明如何能得到维数 d_k 的公式：由于 $c_k \neq 0$，我们可以将任意模形式 $f\in M_k$（$k\geqslant 4$，$2|k$）写成 G_k 的常数倍加上一个新的模形式

$\tilde{f} = \sum \tilde{a}(n) e^{2\pi i z} \in M_k$，其中 $\tilde{a}(0)=0$。于是 $g = \frac{\tilde{f}}{\triangle}$ 是权为 $k-12$ 的权形式（g 在 Γ 的作用下显然满足变换公式（$**$）（对于权 $k-12$），又由于 $\triangle(z)$ 是收敛的无穷乘积，从而它不等于零，并且在 ∞ 处展开式为 $\triangle(z) = e^{2\pi i z} - 24 e^{4\pi i z} + \cdots$）；反之，如果 $g \in M_{k-12}$，而 $c\in\mathbb{C}$，则 $cG_k(z) + g(z)\triangle(z) \in M_k$。因此 $M_k \cong \mathbb{C}\oplus M_{k-12}$.（$k\geqslant 4, 2|k$）。再注意当 $k<0$ 和 $k=2$ 时 $M_k=\{0\}$，而 $M_0=\mathbb{C}$，然后由数学归纳法即得结果。

现在我们给出另一些应用。我们已经证明了：

$$G_4 = c_4 + \sum \sigma_3(n) x^n \in M_4, \qquad x = e^{2\pi i z},$$
$$G_8 = c_8 + \sum \sigma_7(n) x^n \in M_8,$$

其中

$$c_4 = \frac{3}{8\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right), \qquad c_8 = \frac{315}{16\pi^8}\left(1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\cdots\right).$$

但是 $\dim M_8 = 1$，从而 G_4^2 和 G_8 只相差一个常数因子。我们有

$$G_4^2(c_4+x+9x^2+28x^3+\cdots)^2=c_4^2+2c_4x+(18c_4+1)x^2+\cdots,$$

$$G_8=c_8+x+129x^2+\cdots.$$

于是

$$\begin{cases} 129=\dfrac{18c_4+1}{2c_4}, \\ c_8=\dfrac{c_4^2}{2c_4}=\dfrac{c_4}{2}. \end{cases}$$

即$c_4=\dfrac{1}{240}$，　$c_8=\dfrac{1}{480}$。从而得到另一算术应用：

系理

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90},$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\cdots=\frac{\pi^8}{9450}.$$

利用类似的推理，可得到所有 c_k 的值。它们均是有理数。特别地：

$$G_4=\frac{1}{240}+x+9x^2+28x^3+\cdots,$$

$$G_6=-\frac{1}{504}+x+33x^2+\cdots.$$

作为模形式的进一步应用，我们注意Δ，G_4^3和G_6^2有一定线性相关(由于$\dim M_{12}=2$)。计算它们的前几个系数可得到恒等式：

$$\Delta=8000G_4^3-147G_6^2.$$

从而可得到用$\sigma_3(n)$和$\sigma_5(n)$表达$\tau(n)$的一个公式。

练习　直接证明 $8000\left(\dfrac{1}{240}+\sum\sigma_3(n)x^n\right)^3-147\left(-\dfrac{1}{504}+\sum\sigma_5(n)x^n\right)^2$ 的系数均是有理整数。

于是整个思路是很清晰的：由于 M_k 是有限维的，一旦得到一些同权模型之间的线性关系，然后考查它们的 Fourier 系数，便可得出数论函数的恒等式。现在我们证明如何按此法得到例 1 中的等式。首先我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}r_4(n)x^n=1+8x+24x^2+\cdots=\sum_{n_1,n_2,n_3,n_4}x^{n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2}$$

$$=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{n^2}\right)^4.$$

类似地

$$\sum r_8(n)x^n=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{n^2}\right)^8.$$

定理　令

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z} \qquad (z\in\mathbb{H}),$$

则 $\theta(z)^4$是对于群 $\Gamma_4=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma \,\middle|\, c\equiv 0 \pmod 4\right\}$的权 2 模形式，即

$$(\triangle):\qquad \theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^4=(cz+d)^4\theta(z)^4,\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_4.$$

注意 $M_2=\{0\}$，而 M_4 只有$\frac{1}{240}+\sum\sigma_3(n)q^n$，$(q=e^{2\pi iz})$，但是群 Γ_4 比 Γ 小，所以对于 Γ_4 可以有更多的模形式。采用与证明 $G_k\in M_k$ 相类似的方法，可知 $\frac{1}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{d\mid n\\ 4\nmid d}} d\right)q^n$ 是对于群 Γ_4 的权 2 模形式。然后利用上面例子中我们已经谈过的方法，即可得到 $r_4(n)=8\sum_{\substack{d\mid n\\ 4\nmid d}} d$。类似地得到 $r_8(n)=16\sum_{d\mid n}(-1)^{n-d}d^3$。

为什么公式(△)成立?根据上面提到的 Poisson 求和公式，我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(u+z)^2}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi r^2}{t}}\right)e^{2\pi irz}.$$

取 $z=0$，即得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi tu^2}=\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi r^2}{t}}.$$

令 $t=\frac{2z}{i}$，则得到 $\theta(z)=\sqrt{\frac{i}{2z}}\theta(-\frac{1}{4z})$，从而

$$\theta\left(-\frac{1}{4z}\right)^4=-4z^2\theta(z)^4.$$

也就是说，若不考虑符号，则 $\theta(z)$对于$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$满足(＊＊)式。另一方面，显然有$\theta(z+1)=\theta(z)$，从而$\theta(z)^4$对于$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$满足(＊＊)式，但是矩阵$\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$生成群

$$\widetilde{\Gamma}_4=\Gamma_4\cup\left\{\begin{pmatrix}2a & \frac{1}{2}b\\ 2c & 2d\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b,c,d,\in\mathbb{Z},\ 4ad-bc=1\right\}.$$

从而若不考虑符号，则 θ^4对于每个$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\widetilde{\Gamma}_4$ 均满足(＊＊)式，而负号恰好是对于 $\widetilde{\Gamma}_4-\Gamma_4$ 中的矩阵。

最后我们讲一下模形式与数论之间的另一种联系。这在目前还只是猜想。设 a 和 b 是整数，考虑方程

(＊＊＊) $$y^2=x^3+ax+b.$$

如果 $D=(4a^3+27b^2)=0$，则(＊＊＊)的右边有重因子(即为 $(x-n)^2(x+2n)$，其中

$n=\sqrt{-a/3}=\sqrt[3]{b/2}$)。否则我们就称（＊＊＊）定义出一个**椭圆曲线**。这时，我们有如下的猜想：

(1)（谷山，Weil）给了一个椭圆曲线（＊＊＊），则存在一个对于群 Γ_D 的权 2 Hecke 形式（Γ_D 的定义类似于上述的 Γ_4）：

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^n,\qquad q=e^{2\pi iz},$$

其中对于每个素数 $p\nmid D$，均有

$$a(p)=p-((***)\quad \mathrm{mod}\ p \text{ 的解数}).$$

对于 $p|D$ 的 $a(p)$ 也猜想出一个公式。这样一来，给了椭圆曲线（＊＊＊），我们就有了全部系数 $a(p)$，然后利用公式（＊）可以把**所有**的 $a(n)$ 通过 a 和 b 表示出来。问题在于要证明：由此得到的 $\sum a(n)q^n$ 满足（＊＊＊）。（对于群 Γ_D）。

(2).(Birch-Swinnerton-Dyer)（＊＊＊）有无穷多组有理解 $\Longleftrightarrow \int_0^{\infty}f(it)dt=0$。

已经计算了成百个例子，这两个猜想都是正确的。但是目前离证明这两个猜想还相距甚远。大约三十年前，Deuring 对于一类（无穷多个）椭圆曲线（即所谓具有复乘法的椭圆曲线，例如当 $a=0$ 或者 $b=0$ 时），证明了猜想 (1)。而大约在七年前，Coates 和 Wiles 对于某些情形证明了猜想(2)。

（**冯克勤**译　**王　元**校）

对自然界的深入研究乃是数学发现的最富成果的源泉。由于它为数学提出了确定的目标，因而有利于剔除笼统的问题和无用的计算。此外，对于形成分析方法本身，对于发现我们最关心的，自然科学必须永远保留的原理，这种深入的研究也是最可靠的手段。

——J.Fourier

译自《On Mathematics and Mathematicians》p.89