MATHEMATICS

EEN ONGELIJKHEID TEGENGESTELD AAN DIE VAN CAUCHY

DOOR

D. ZAGIER

(Communicated by Prof. W. T. van Est at the meeting of December 18, 1976)

SUMMARY

In this article we prove the following inequality, which can be considered as a partial converse to Cauchy's inequality: if $f(t)$ and $g(t)$ are decreasing functions on $[0, \infty)$, then

$$\int_0^\infty f(t)g(t)dt \geqslant \left(\int_0^\infty f(t)^2dt\right)\left(\int_0^\infty g(t)^2dt\right) / \max\left(f(0)\int_0^\infty g(t)dt,\ g(0)\int_0^\infty f(t)dt\right).$$

This inequality is best possible in terms of the data appearing on the right-hand side.

Indien f en g twee positieve reëelwaardige functies zijn, dan kan de integraal $\int f(t)g(t)dt$ zonder moeite naar boven afgeschat worden, hetzij door toepassing van de ongelijkheid van Cauchy:

$$\int fg \leqslant \left(\int f^2\right)^{1/2}\left(\int g^2\right)^{1/2}, \tag{1}$$

hetzij – mits f en g begrensd zijn – met behulp van de evidente ongelijkheden

$$\int fg \leqslant (\max f)\left(\int g\right),\quad \int fg \leqslant (\max g)\left(\int f\right). \tag{2}$$

Een dergelijke formule, die voor de integraal in kwestie een niet-triviale afschatting naar *beneden* oplevert, bestaat echter niet: immers de integraal is nul, als f en g disjuncte dragers hebben. Doch, in de veel vóórkomende situatie, waarin f en g dalende functies in eenzelfde interval zijn, kan dit zeker niet gebeuren, en in dit geval is het inderdaad mogelijk, een niet-triviale (en blijkbaar ook niet bekende) afschatting naar beneden aan te geven:

STELLING: *Laat $f(t)$ en $g(t)$ dalende, op $[0, \infty)$ integreerbare functies zijn, en stel*

$$n = f(0), \qquad m = g(0),$$
$$X = \int_0^\infty f(t)dt, \qquad Y = \int_0^\infty g(t)dt,$$
$$A = \int_0^\infty f(t)^2dt, \qquad B = \int_0^\infty g(t)^2dt,$$

dan geldt:

$$\int_0^\infty f(t)g(t)dt \geqslant \min\left(\frac{AB}{mX}, \frac{AB}{nY}\right). \tag{3}$$

Dit bewijzen wij eerst onder de voorwaarde, dat f en g differentieerbaar zijn. Schrijft men

$$\xi(t) = -f'(t), \quad \eta(t) = -g'(t),$$

dan zijn ξ en η positief en er geldt

$$f(t) = \int_t^\infty \xi(x)dx, \quad g(t) = \int_t^\infty \eta(y)dy.$$

Hieruit volgt

$$\int_0^\infty \xi(x)dx = n, \quad \int_0^\infty x\xi(x)dx = X, \quad \int_0^\infty \eta(y)dy = m, \quad \int_0^\infty y\eta(y)dy = Y \tag{4}$$

en verder

$$\int_0^\infty f(t)g(t)dt = \int_0^\infty \int_t^\infty \int_t^\infty \xi(x)\eta(y)dxdydt = \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, y)\xi(x)\eta(y)dxdy. \tag{5}$$

Op gelijke wijze toont men aan:

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, x')\xi(x)\xi(x')dxdx', \quad B = \int_0^\infty \int_0^\infty \min(y, y')\eta(y)\eta(y')dydy'. \tag{6}$$

Voor vaste x, y geldt wegens (4)

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, x') \min(y, y')\xi(x')\eta(y')dx'dy' \leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty xy'\xi(x')\eta(y')dx'dy' = nYx,$$

en door verwisseling van de rollen van x, x', ξ en y, y', η kan men dezelfde ongelijkheid bewijzen met mXy in plaats van nYx als rechterlid. Derhalve geldt:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, x') \min(y, y')\xi(x')\eta(y')dx'dy' \leqslant \max(mX, nY) \min(x, y).$$

Door deze ongelijkheid met $\xi(x)\eta(y)$ ($\geqslant 0$) te vermenigvuldigen en vervolgens van 0 tot ∞ te integreren vindt men de ongelijkheid

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, x') \min(y, y')\xi(x)\xi(x')\eta(y)\eta(y')dxdx'dydy' \leqslant$$

$$\leqslant \max(mX, nY) \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, y)\xi(x)\eta(y)dxdy,$$

die wegens (5) en (6) equivalent is met (3).

Het algemene geval (dus f en g willekeurig) kan men behandelen door, ofwel f en g met differentieerbare functies te benaderen, ofwel de gehele bovenstaande redenering met behulp dan Stieltjes integralen te formuleren (b.v. men schrijft dan $A = \int_0^\infty \int_0^\infty \min(x, x')df(x)df(x')$ in plaats van de eerste formule in (6)).

Het is misschien de moeite waard om op te merken, dat de door (1), (2) en (3) gegeven afschattingen, .w.z.

$$\min\left(\frac{AB}{mX}, \frac{AB}{nY}\right) \leqslant \int_0^\infty f(t)g(t)dt \leqslant \min(mX, \sqrt{AB}, nY),$$

onder de gegeven voorwaarden voor f en g niet kunnen worden verscherpt. Dit blijkt uit het beschouwen van voorbeelden, waarbij men voor f en g trap-functies kiest, die slechts twee positieve waarden aannemen.

Dit onderzoek vond zijn motivatie in een probleem in de economie, nl. de berekening van de "Gini coëfficiënt" (een bepaalde, in de economie gebruikelijke maat voor het al dan niet uniform zijn van de verdeling van inkomen van een bevolking) voor een bevolking, die samengesteld is uit verscheidene groepen met gegeven Gini coëfficiënten. Over deze toepassing is een artikel in voorbereiding.

Mathematisches Institut
Wegelerstraße 10,
D-5300 Bonn