ARITHMETISCHE KOMPAKTIFIZIERUNG DES MODULRAUMS DER ABELSCHEN VARIETÄTEN

G. Faltings
Fachbereich Mathematik
Universität-Gesamthochschule Wuppertal
Gaußstr. 20
5600 Wuppertal 1

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1 EINLEITUNG

Die Konstruktion des Modulraumes A_g der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten der Dimension g über $\mathbb{Z}$ ist seit langem bekannt. Man erhält je nach Geschmack einen groben Modulraum oder ein algebraisches Feld, nach Einführung von Level-Strukturen sogar einen feinen Modulraum. Es sind auch Methoden der Kompaktifizierung bekannt über den komplexen Zahlen (siehe [AMRT], [N]), doch fehlte bis jetzt die Beschreibung einer solchen über $\mathbb{Z}$. Dies geschieht in dieser Arbeit. Genauer gesagt, konstruieren wir ein algebraisches Feld, welches eigentlich über $\mathbb{Z}$ ist, das A_g als offene Teilmenge enthält, und über dem eine universelle semiabelsche Varietät existiert. Der Rand wird ziemlich genau beschrieben, und man erhält für Level-n-Strukturen sogar einen algebraischen Raum.

Dabei wird für unsere Zwecke ein algebraisches Feld gegeben durch ein Schema $\underline{S}$, von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$, sowie eine endliche Abbildung $\underline{R} \to \underline{S} \times_{\mathbb{Z}} \underline{S}$, welche $\underline{R}$ zu einem Gruppoid über $\underline{S}$ macht, und für die die Projektionen von $\underline{R}$ auf $\underline{S}$ étale sind. Man erkennt leicht die Äquivalenz zur Definition in [DM], und wer will, kann sich nach Einführung von Level-n-Strukturen darauf beschränken, daß $\underline{R}$ abgeschlossenes Unterschema von $\underline{S} \times_{\mathbb{Z}} \underline{S}$ ist, wobei man dann bei algebraischen Räumen landet ([A]). Bei der Konstruktion von $\underline{S}$ benutzt man M. Artin's Deformations-Theorie ([A]) sowie eine leichte Verallgemeinerung von D. Mumford's Konstruktion degenerierender abelscher Varietäten. Als $\underline{R}$ nimmt man einfach die Normalisierung des von dem Modulproblem A_g gelieferten Gruppoids. Daß dies die gewünschten Eigenschaften hat, folgt aus einer Betrachtung degenerierender abelscher Varietäten, indem man zeigt, daß man die in Mumford's Konstruktion auftretenden Perioden aus den Koeffizienten der θ-Reihe ablesen kann.

Schließlich sei noch erwähnt, daß anders als im Fall der Kurven die Kompaktifizierung nicht kanonisch ist, sondern von der Wahl einer Kegelzerlegung der positiv semidefiniten quadratischen Formen in g Variablen abhängt. Dies ist auch bei der komplexen toroidalen Kompaktifizierung der Fall, und in der Tat liefern unsere Methoden über $\mathbb{C}$ gerade diese Modelle.

Der Aufbau der Arbeit ist wie folgt:

Zunächst betrachten wir degenerierende abelsche Varietäten und ordnen ihnen quadratische Formen zu. Dies wird zum einen benutzt, um später die Kompaktheit zu zeigen, und motiviert zum anderen die Wahl der Daten, welche bei der verallgemeinerten Mumford-Konstruktion eingehen.

Diese folgt dann im nächsten Kapitel. Dabei sind alle auftretenden Schwierigkeiten im wesentlichen schon von Mumford in [M4] gelöst worden. Wir brauchen dies nur noch von Tori auf semiabelsche Varietäten zu verallgemeinern.

Danach bereitet die Konstruktion von $\underline{S}$ und $\underline{R}$ keine großen Probleme mehr. Ihr ist das vierte Kapitel gewidmet, worauf dann die Anwendungen folgen:

Wir betrachten Level-Strukturen, Modulformen (unter anderem eine arithmetische Behandlung der minimalen Kompaktifizierung), étale Garben und Kohomologie, die Torelli-Abbildung sowie die Beziehungen zur komplexen Theorie. Eine weitere Anwendung wäre es, den ersten Teil des Beweises der Mordell-Vermutung zu vereinfachen (siehe [F]), und es bleibt zu hoffen, daß eine arithmetische Theorie der Siegel'schen Modulformen in Zukunft noch einiges Schöne hervorbringt.

Der Leser wird bemerken, daß alle wesentlichen Grundideen von D. Mumford übernommen worden sind, und dieser hätte sicher auch noch die Resultate dieser Arbeit erhalten, wenn er sich nicht anderen Interessen zugewandt hätte. Einer seiner Schüler, Ching-Li Chai, hat kürzlich ebenfalls eine arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums A_g beschrieben. (Siehe [C]). Nach den mir voliegenden Informationen hat er auch Mumford's Konstruktion verallgemeinert (entsprechend unserem § 3), benutzt aber für die Konstruktion der Kompaktifizierung Theta-Funktionen und Aufblasungen. Dies hat den Vorteil großer Explizitheit und den Nachteil, daß man keine universelle semiabelsche Varietät erhält, und daß man nur über $\mathbb{Z}\left[{}^1/2\right]$ kompaktifiziert. Auf jeden Fall hat er seine Resultate unabhängig von mir und früher erhalten, so daß ihm bei Überschneidungen der Vorrang gebührt. Da er sehr viel mehr Sorgfalt auf die Ausarbeitung der Details verwendet als der Verfasser dieser Arbeit, konnten seine Ergebnisse bisher noch nicht erscheinen.

§ 2 DEGENERIERENDE ABELSCHE VARIETÄTEN

a) Sei R ein normaler kompletter lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$ und Quotientenkörper K. Wir nehmen an, daß K eine Charakteristik verschieden von zwei hat, doch ist es durchaus zugelassen, daß die Charakteristik von k zwei ist. s und η seien der spezielle und der generische Punkt von $\mathrm{Spek}(R)$.

G sei eine semiabelsche Varietät über $\mathrm{Spek}(R)$, d.h. G ist ein glattes algebraisches Gruppen-Schema über R, von endlichem Typ, dessen Fasern zusammenhängend sind und Erweiterungen von abelschen Varietäten durch Tori. Die Darstellung vereinfacht sich sehr, wenn die spezielle Faser G_s selbst ein Torus ist. Wir empfehlen, sich die Argumente zuerst an diesem Spezialfall klar zu machen. Der allgemeine

Fall erfordert keine neuen Ideen, sondern nur eine Reihe von Notationen und Definitionen. Wir setzen voraus, daß G_η eine abelsche Varietät ist, und daß der maximale Torus von G_s zerfällt. Dann ist die formale Komplettierung $\hat{G}$ eine Erweiterung einer formalen abelschen Varietät $\hat{A}$ (entsprechend einem A über R) durch einen formalen Torus $\hat{T} \cong \hat{G}_m^r$. Es gibt eine Gruppe $\tilde{G}$, mit $\hat{\tilde{G}} \cong \hat{G}$, so daß $\tilde{G}$ eine Erweiterung von A durch $T = G_m^r$ ist.

$$0 \to T \to \tilde{G} \to A \to 0$$

Sei $X = X(T) \cong \mathbb{Z}^r$ die Charaktergruppe von T. Dann wird $\tilde{G}$ gegeben durch einen Morphismus $X \to \mathrm{Pic}^0(A)(R)$

$$\mu \longmapsto \mathcal{O}_\mu \quad ,$$

welcher jedem $\mu \in X$ das zugehörige Geradenbündel auf A zuordnet. Es gibt kanonische Isomorphismen

$$\mathcal{O}_\mu \otimes \mathcal{O}_\nu \cong \mathcal{O}_{\mu+\nu} \quad .$$

b) Wir nehmen weiter an, daß auf G ein Geradenbündel $\underline{L}$ gegeben ist, welches auf der generischen Faser G_η eine prinzipale Polarisation definiert. ([M1], Ch. 6, § 2). Dann besitzt $\underline{L}$ eine kanonische kubische Struktur, oder äquivalent dazu, definiert $m^*(\underline{L}) \otimes pr_1^*(\underline{L})^{-1} \otimes pr_2^*(\underline{L})^{-1}$ eine Biextension von $G \times G$ durch G_m (siehe [MB], I, § 2) .

Das formale Geradenbündel $\hat{\underline{L}}$ ist dann samt seiner kubischen Struktur Pullback eines $\hat{\underline{M}}$ auf $\hat{A}$, welches eine prinzipale Polarisation für $\hat{A}$ definiert. $\hat{\underline{M}}$ kommt von einem $\underline{M}$ auf A, und $\tilde{\underline{L}}$ auf $\tilde{G}$ sei das Pullback von $\underline{M}$. Dann ist $\hat{\tilde{\underline{L}}}$ isomorph zu $\hat{\underline{L}}$, wobei der Isomorphismus die kubische Struktur respektiert. Allerdings ist dieser Isomorphismus nicht eindeutig, sondern kann mit einem Charakter $\chi : \tilde{G} \to G_m$ modifiziert werden. Es sei noch bemerkt, daß ein solcher Charakter eindeutig bestimmt ist durch seine Einschränkung $\mu \in X$ auf T, und daß man auf diese Weise genau alle μ's erhält, welche im Kern der Abbildung $X \to \mathrm{Pic}^0(A)$ liegen.

Bisweilen werden wir voraussetzen, daß $\underline{L}$ symmetrisch ist, d.h., daß $[-1]^*(\underline{L}) \cong \underline{L}$ ($[-1] = -\mathrm{id} : G \to G$) . Dann ist auch $[-1]^*(\underline{M}) \cong \underline{M}$, doch sind diese Isomorphismen im allgemeinen nicht miteinander verträglich. Wenn man sie so normalisiert, daß sie auf der Faser in Null die Identität sind, so unterscheiden sich die Symmetrien auf $\hat{\underline{L}}$ und dem Pullback von $\hat{\underline{M}}$ um einen Charakter χ wie oben.

c) $\underline{M}$ definiert einen Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0(A)$, und somit erhält man eine Abbildung

$$\underline{c} : X \to A(R) \quad ,$$

mit $\underline{c}(\mu)^*(\underline{M}) \cong \underline{M}_\mu \cong \underline{M} \otimes \mathcal{O}_\mu$ (Schnitte von $\underline{M}_\mu$ über einer offenen Teilmenge von A entsprechen Schnitte von $\hat{\underline{L}}$ über dem Urbild, welche sich unter T gemäß μ transformieren). Für das folgende müssen wir diese Isomorphismen geeignet normalisieren:

Definition:

Ein zulässiges System von Isomorphismen besteht aus Isomorphismen

i) $\underline{c}(\mu)^*(\mathcal{O}_\nu) \cong \mathcal{O}_\nu$

ii) $\underline{M}_\mu \cong \underline{c}(\mu)^*(\underline{M})$, so daß

a) Die Isomorphismen in i) sind linear in μ und ν

b) Für $\mu,\nu \in X$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{c}(\mu+\nu)^*(\underline{M}) & \xrightarrow{\sim} \underline{c}(\mu)^*(\underline{c}(\nu)^*(\underline{M})) \xrightarrow{\sim} & \underline{c}(\mu)^*(\underline{M}_\nu) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\underline{M}_{\mu+\nu} & \xleftarrow{\sim} \underline{M}_\mu \otimes \mathcal{O}_\nu \xleftarrow{\sim} & \underline{c}(\mu)^*(\underline{M}) \otimes \underline{c}(\mu)^*(\mathcal{O}_\nu)
\end{array}$$

Man sieht leicht, daß zulässige Systeme von Isomorphismen existieren. Je zwei unterscheiden sich dadurch, daß man die Isomorphismen in ii) mit einem $q(\mu) \in R^*$ multipliziert. $q : X \longrightarrow R^*$ muß die Eigenschaft haben, daß $b(\mu,\nu) = q(\mu+\nu)/(q(\mu)\cdot q(\nu))$ bilinear ist in μ und ν . Die Isomorphismen in i) werden dann mit $b(\mu,\nu)$ multipliziert. Wir wählen von nun an ein festes zulässiges System von Isomorphismen.

c) Da $\underline{L}$ auf G eine prinzipale Polarisation definiert, ist $\Gamma(G,\underline{L})$ ein R-Modul vom Rang 1 (in der Tat sogar ein divisorielles Ideal).

Sei $\theta_{\underline{L}} \in \Gamma(G,\underline{L})$ ein nicht verschwindendes Element. Genauso ist $\Gamma(A,\underline{M})$ frei, mit einem Erzeugenden $\theta_{\underline{M}}$. Für $\mu \in X$ erzeugt dann $\theta_{\underline{M}}^{\mu} = \underline{c}(\mu)^*\theta_{\underline{M}}$ $\Gamma(A,\underline{M}_{\mu}) = \Gamma(A,\underline{c}(\mu)^*(\underline{M}))$.

Den formalen Schnitt $\hat{\theta}_{\underline{L}} \in \Gamma(\hat{G},\hat{\underline{L}})$ kann man nun nach T-Eigenfunktionen entwickeln:

$$\hat{\theta}_{\underline{L}} = \sum_{\mu\in X} a(\mu) \cdot \hat{\theta}_{\underline{M}}^{\mu} .$$

Dabei sind die Koeffizienten $a(\mu) \in R$, und sie konvergieren gegen Null in der $\underline{m}$-adischen Topologie. Bei Wechsel des zulässigen Systems von Isomorphismen erhalten sie einen Faktor $q(\mu)$. Damit ist klar, daß der Inhalt des folgenden Satzes nicht von dieser Wahl abhängt:

Satz 1:

i) $a(\mu) \neq 0$ für alle $\mu \in X$.

ii) $b(\mu,\nu) = a(\mu+\nu)a(0)/(a(\mu)a(\nu)) \in K^*$ ist bilinear in μ und ν

iii) Falls $\mu \neq 0$, so ist $b(\mu,\mu) \in \underline{m}$

iv) Wenn ein Geradenbündel $\underline{L}_1$ auf G dieselbe prinzipale Polarisation definiert, so daß $\hat{\underline{L}}_1 \cong \hat{\underline{L}}$, so liefert $\underline{L}_1$ dieselbe Bilinearform $b(\mu,\nu)$.

Bemerkung:

Die Aussage iii) folgt aus i) und ii):
Diese liefern, daß $a(n\mu)a(-n\mu) = a(0)^2 \cdot b(n\mu)^{n^2}$. Da die linke Seite in R liegt und für $n\to\infty$ $\mathfrak{m}$-adisch gegen Null konvergiert, liegt auch $b(\mu,\mu)$ in R und ist keine Einheit.

Beweis von Satz 1:

Man bettet R geeignet in einen kompletten diskreten Bewertungsring ein und darf dann annehmen, daß $\dim(R) = 1$. Es steht uns frei, den Grundkörper zu erweitern, d. h., R durch die Normalisierung in einer endlichen Erweiterung zu ersetzen. Wir dürfen dann zum Beispiel annehmen, daß alle 2-Teilungspunkte von G_η K-rational sind. Wir behandeln zunächst den folgenden Spezialfall:

$\underline{L} \cong [-1]^*\underline{L}$ ist symmetrisch, und die Symmetrie ist die Identität auf allen 2-Teilungspunkten von T. (Wir identifizieren $T[2] = \hat{T}[2] \underline{\subseteq} \tilde{G}[2] = \hat{G}[2] \underline{\subseteq} G[2]$ die 2-Teilungs-Untergruppen.)

Dann ist auch $\underline{M}$ symmetrisch, und der Charakter χ von $\tilde{G}$, welcher den Unterschied der Symmetrien zwischen $\hat{\underline{L}}$ und $\hat{\underline{M}}$ beschreibt, ist gleich Eins auf $T[2]$. Somit ist $\chi|T = 2\mu_\circ$, mit einem $\mu_\circ \in X$.

Dann ist $[-1]^*\theta_{\underline{L}} = \pm\theta_{\underline{L}}$, und so ergibt sich, daß $a(2\mu_0-\mu) = a(\mu)\cdot$ (Einheit aus R^*). Wir zeigen zunächst, daß Funktion $b,c : X \to K$ existieren mit

(*) $a(\mu)a(\nu) = b(\mu+\nu)c(\mu-\nu)$. Dies ist äquivalent zu der folgenden Behauptung:

(*)' Sei $\rho \in X$. Dann gibt es Funktionen b_ρ, c_ρ auf X mit $a(\mu+\nu+\rho)a(\mu-\nu) = b_\rho(\mu)c_\rho(\nu)$.

Dazu zunächst etwas Terminologie:

Ein Schnitt $f \in \Gamma(\hat{G} \times \hat{G}, \hat{\underline{L}}^2 \otimes \hat{\underline{L}}^2)$ heißt ein Produkt, falls $f = g \otimes h$ mit $g,h \in \Gamma(\hat{G},\hat{\underline{L}}^2)$. Analog für Schnitte von $\hat{\underline{M}}^2$. Das fundamentale Beispiel eines zerlegten Schnittes ergibt sich wie folgt:
Betrachte die Isogenie

$$\phi_G : G \times G \to G \times G$$
$$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$$

Bekanntlich ist $\phi_G^*(\underline{L} \otimes \underline{L}) = \underline{L}^2 \otimes \underline{L}^2$. Sei $H \underline{\subseteq} G[2]$ eine endliche flache Untergruppe der Ordnung 2^d $(d = \dim(G))$, so daß $H(K) \underline{\subseteq} G[2](K)$ ein maximal isotroper Unterraum für die durch die Polarisation gegebene symplektische Form ist. Dann kann man H äquivariant auf $\underline{L}^2$ operieren lassen, und descente liefert ein Geradenbündel $\underline{L}_1$ auf $G_1 = G/M$, welches auf $G_{1,\eta}$ eine prinzipale Polarisation definiert. Jeder $H \times H$-invariante Schnitt von $\underline{L}^2 \otimes \underline{L}^2$ liefert dann einen globalen Schnitt von $\underline{L}_1 \otimes \underline{L}_1$ und ist damit ein Produkt. Beispiele für $H \times H$-invariante Schnitte erhalten wir wie folgt:

$$\phi_G^*(\theta_{\underline{L}} \otimes \theta_{\underline{L}})(x,y) = \theta_{\underline{L}}(x+y) \otimes \underline{\theta}_L(x-y)$$

ist schon invariant unter der Diagonal-Aktion von H . Dann ist

$$\sum_{z \in H(R)} \underline{\theta}_L(x+y+z) \otimes \underline{\theta}_L(x-y+z)$$

$H \times H$-invariant, und damit ein Produkt. Man kann die H-Aktion auf $\underline{L}$ noch mit einem Charakter $\varepsilon : H \to \{\pm 1\}$ twisten, und erhält, daß auch

$$\sum_{z \in H(R)} \varepsilon(z) \underline{\theta}_L(x+y+z) \otimes \underline{\theta}_L(x-y+z)$$

ein Produkt ist.

Wir wählen nun ein H , welches $T[2]$ umfaßt. Dann ist $H/T[2] = H_1 \subseteq A[2]$ maximal isotrop, und jedes solche H_1 kann man auf diese Weise erhalten. Man läßt nun H so auf $\underline{L}^{\otimes 2}$ operieren, daß man den Überblick über die zulässigen Isomorphismen nicht verliert. Dazu gehe man folgendermaßen vor:

Lasse H_1 auf $\underline{M}^2$ operieren. Dies liefert ein $\underline{M}_1$ auf $A_1 = A/H_1$. Die Abbildung

$$\underline{c}_1 : X \xrightarrow{c} A \to A_1$$

definiert dann eine Erweiterung

$$0 \to T = T_1 \to \tilde{G}_1 \to A_1 \to 0$$

via Geradenbündeln $\mathcal{O}_{1,\mu}$ und $\underline{M}_{1,\mu} = \underline{M}_1 \otimes \mathcal{O}_{1,\mu}$ auf A_1 . Beim Pullback nach A geht $\underline{M}_{1,\mu}$ über in $\underline{M}^2 \otimes \mathcal{O}_{2\mu}$, und $\mathcal{O}_{1,\mu}$ in $\mathcal{O}_{2\mu}$. Man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d, "2\cdot"] & \tilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T=T_1 \arrow[r] & \tilde{G}_1 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und es ist $\tilde{G}_1 \cong G_1/H$. Weiter sieht man sofort, daß man ein zulässiges System von Isomorphismen für $\tilde{G}_1, \underline{M}_1$ wählen kann, welches bei Pullback verträglich ist mit dem für $\tilde{G}, \underline{M}$ (z. B. ist das Pullback von $\underline{c}_1(\mu)^*(\mathcal{O}_{1,\nu})$ gleich $\underline{c}(\mu)^*\mathcal{O}_{2\nu}$ und isomorph zu $\mathcal{O}_{2\nu}$, u.s.w.)

Die Operation von H_1 auf $\underline{M}^2$ liefert eine Operation von H auf $\underline{\tilde{L}}^2$ und $\underline{\hat{L}}^2$. Diese Operation ist algebraisch, d. h., kommt von einer Operation von H auf $\underline{L}^2$: Je zwei Operationen von H auf $\underline{L}^2$ oder $\underline{\hat{L}}^2$ differieren um einen Charakter $\varepsilon : H(R) \to \{\pm 1\}$, und mindestens eine formale Operation ist algebraisch.

Wir können nun $(*)'$ zeigen:

Sei $\rho \in X$. Wähle $\varepsilon : H(R) \to \{\pm 1\}$ mit $\varepsilon | T[2] = \rho | T[2]$. Dann ist der folgende Schnitt von $\underline{\hat{L}}^2 \otimes \underline{\hat{L}}^2$ ein Produkt:

$$\sum_{z \in H(R)} \varepsilon(z)\ \hat{\theta}_{\underline{L}}(x+y+z) \otimes \hat{\theta}_{\underline{L}}(x-y+z)$$

$$= \sum_{\substack{z \in H(R)\\ \mu,\nu \in X}} \varepsilon(z)\ a(\mu)a(\nu)\ \hat{\theta}^{\mu}_{\underline{M}}(x+y+z) \otimes \hat{\theta}_{\underline{M}}^{\ \nu}(x-y+z)$$

Bei festem μ,ν verschwindet die Summe über $H(R)$ (sogar schon über $T[2]$) , außer wenn es $\alpha,\beta \in X$ gibt mit $\mu = \rho+\alpha+\beta$, $\nu = \alpha-\beta$. Also ergibt sich

$$\sum_{\alpha,\beta \in X} a(\rho+\alpha+\beta)\ a(\alpha-\beta) \sum_{z \in H(R)} \varepsilon(z)\, \theta_{\underline{M}}^{\ \rho+\alpha+\beta}(x+y+z) \otimes \theta_{\underline{M}}^{\ \alpha-\beta}(x-y-z)$$

Die innere Summe läßt sich umschreiben als

$$(\underline{c}(\alpha)^* \otimes \underline{c}(\beta)^*) \sum_{z \in H_1(R)} \varepsilon(z)\ z^*(\phi_A^{\ *}(\theta_{\underline{M}}^{\rho} \otimes \theta_{\underline{M}}))$$

mit
$$\phi_A : A \times A \to A \times A$$
$$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$$

Dabei ist $\theta_A^{\ \rho} \otimes \theta_A$ der einzige Schnitt von $\underline{c}(\rho)^*(\underline{M}) \otimes \underline{M}$, $\phi_A^{\ *}(\theta_A^{\ \rho} \otimes \theta_A)$ ein Schnitt von $(\underline{M}^2 \otimes \mathcal{O}_\rho) \otimes (\underline{M}^2 \otimes \mathcal{O}_\rho)$, und die innere Summe wieder ein Produkt, etwa von der Form $g \otimes h$. Wir erhalten schließlich, daß

$$\sum_{\alpha,\beta\in X} a(\rho+\alpha+\beta)\ a(\alpha-\beta)\ \underline{c}(\alpha)^*(g) \otimes \underline{c}(\beta)^*(h)$$

ein Produkt ist.

Da $\underline{c}(\alpha)^*(g)$ ein Schnitt ist von $M^2 \otimes \mathcal{O}_{2\alpha+\rho}$, und $\underline{c}(\beta)^*(h)$ ein Schnitt von $\underline{M}^2 \otimes \mathcal{O}_{2\beta+\rho}$, folgt daraus die Behauptung (*)' , indem man obige Summe schreibt als

$$\Big(\sum_{\alpha\in X} b_\rho(\alpha)\ \underline{c}\ (\alpha)^*(g)\Big) \otimes \Big(\sum_{\beta\in X} c_\rho(\beta)\ \underline{c}(\beta)^*(h)\Big)\ .$$

Damit sind (*)' und (*) gezeigt, d. h.

$$a(\mu)\ a(\nu) = b(\mu+\nu)\ c(\mu-\nu)\ .$$

d) Wir zeigen zunächst Teil i) von Satz 1:

Wir wissen schon, daß $a(\mu) = 0 \Longleftrightarrow a(2\mu_0-\mu) = 0$. Wir behaupten zunächst, daß eine Untergruppe $Y \subset X$ existiert mit

$$a(\mu) \neq 0 \Longleftrightarrow \mu \in \mu_0 + Y\ .$$

Ersetzt man $a(\mu)$ durch $a(\mu+\mu_0)$, so darf man annehmen, daß $\mu_0 = 0$. Sei $Y = \{\mu \mid a(\mu) \neq 0\}$. Da $\hat{\theta}_G \neq 0$, ist Y nicht leer, und es ist $Y = -Y$.

i) $0 \in Y$: Sei $\mu \in Y \Rightarrow a(\mu)\ a(\mu) = b(2\mu)\ c(0) \neq 0$,
$a(\mu)\ a(-\mu) = b(0)\cdot c(2\mu) \neq 0$, somit ist
$b(0) \neq 0$, $c(0) \neq 0$ und $a(0)^2 = b(0)\cdot c(0) \neq 0$.

ii) $\mu,\nu \in Y \Rightarrow b(2\mu) \neq 0$, $c(2\nu) \neq 0$ (siehe i)
$\Rightarrow a(\mu+\nu)\ a(\mu-\nu) = b(2\mu)\ c(2\nu) \neq 0 \Rightarrow \mu\pm\nu \in Y$

iii) $Y = X$:
Andernfalls gäbe es ein endlich flaches Untergruppenschema $N \subseteq T$, $N \neq (0)$, so daß alle $\mu \in Y$ auf N identisch den Wert 1 annehmen, und $\hat{\theta}_G$ ist ein Eigenvektor für die Aktion von N auf $\underline{\hat{L}}$. Für Elemente $x_1,\ldots,x_n \in \mathcal{G}(R)$ mit $\sum_{j=1}^n x_j = 0$ ist $\bigotimes_{j=1} x_j^*(\theta_G)$ ein

globaler Schnitt von $\otimes x_j^*(\underline{L}) \cong \underline{L}^{\otimes n}$, welcher ein Eigenvektor für N ist. $G(R)$ ist Zariski-dicht in G_η, und es ist wohlbekannt, daß für $n \geq 3$ die oben definierten Schnitte von $\underline{L}^{\otimes n}$ eine projektive Einbettung von G_η liefern. Andererseits muß diese Einbettung über $(G/N)_\eta$ faktorisieren, was ein Widerspruch ist.

Damit ist zunächst i) gezeigt. ii) ist nun ganz einfach:
Aus der Identität

$$a(\mu)\ a(\nu) = b(\mu+\nu)\ c\ (\mu-\nu)$$

folgt für $\lambda,\mu,\nu \in X$:

$$a(\lambda+\mu+\nu)\cdot a(\lambda+\mu)^{-1}\cdot a(\lambda+\nu)^{-1}\cdot a(\mu+\nu)^{-1}\cdot$$

$$\cdot a(\lambda)\cdot a(\mu)\cdot a(\nu)\ a(0)^{-1} = 1$$

(Berechne $a(\lambda+\mu+v)\cdot a(\lambda)$, $a(\lambda+\mu)\ a(\lambda+\nu)$, $a(\mu)\ a(\nu)$ und $a(\mu+\nu)\cdot a(0)$ nach obiger Identität), und dies ist Behauptung ii).

e) Wir kommen nun zu beliebigen $\underline{L}$'s . Diese erhält man durch Translation mit einem Element aus $G(K)$ aus einem $\underline{L}$ der bisher betrachteten Art (symmetrisch, Symmetrie = 1 auf $T[2]$) . Wenn dieses Element in $G(R)$ liegt, so induziert es einen Automorphismus von $\hat{G}$, und man rechnet alles direkt nach. Im allgemeinen kann man **es jedenfalls** ausdehnen zu einem Element aus $G^*(R)$, wobei G^* das Néron-Modell von G bezeichne. G ist die Zusammenhangskomponente der Eins von G^* , und $\underline{L}$ und θ_G dehnen sich aus auf G^* . Allerdings hat die Ausdehnung $\underline{L}^*$ von $\underline{L}$ im allgemeinen keine kubische Struktur mehr.

Wie bisher kann man θ_{G^*} auf jeder Komponente von $\hat{G}^*$ nach $\hat{T}$-Eigenfunktionen entwickeln. Man erhält dann Koeffizienten $\{\tilde{a}(\mu), \mu \in X\}$, welche von der Komponente abhängen. Wir müssen zeigen, daß sie alle verschieden von Null sind, und daß $\tilde{a}(\mu+\nu)\ \tilde{a}(0)/(a(\mu)a(\nu)) = \tilde{b}(\mu,\nu)$ bilinear und unabhängig von der Komponente ist. Wir wissen schon, daß nicht alle $\tilde{a}(\mu)$ verschwinden. Wir schließen mit unserem alten Trick: Wähle $H \subseteq G \subseteq G^*$ wie vorher. Dann ist für jeden Charakter $\varepsilon : H(R) \to \{\pm 1\}$ und jedes $x_0 \in G^*(R)$

$$\sum_{z\in H} \varepsilon(z)\,\theta_{G^*}(x+x_0+y+z) \otimes \theta_{G^*}(x-y+z)$$

wieder ein Produkt, und es ergibt sich, daß $\tilde{a}(\mu)\ \tilde{\tilde{a}}(\nu) = \tilde{b}(\mu+\nu)\ \tilde{c}\ (\mu-\nu)$, mit geeigneten Funktionen $\tilde{b},\tilde{c}$ auf X. Dabei sind $\tilde{a},\tilde{\tilde{a}}$ die Koeffizienten zu verschiedenen Komponenten. Da für die Funktion a zur Einskomponente schon alles nähere bekannt ist, folgt leicht die Behauptung, und Satz 1 ist vollständig bewiesen.

f) Schließlich benötigen wir noch ein Resultat, nach dem $b(\mu,\nu)$ und die Polarisation auf A die Polarisation von G_η bestimmen. Es seien dazu gegeben zwei G's, G_1 und G_2, so daß $\hat{G}_1 \cong \hat{G}_2$ und damit $A_1 \cong A_2 \cong A$. Weiter nehmen wir an, daß Geradenbündel $\underline{L}_1$ und $\underline{L}_2$ auf G_1 bzw. G_2 existieren, welche prinzipale Polarisationen auf den generischen Fasern liefern und auch dieselbe Polarisation auf A ergeben. (d. h. $\underline{M}_1$ und $\underline{M}_2$ unterscheiden sich um eine Translation). Schließlich sollen $\underline{L}_1$ und $\underline{L}_2$ dieselbe Bilinearform b liefern.

<u>Satz 2</u>:

Unter diesen Umständen ist der formale Isomorphismus $\hat{G}_1 \xrightarrow{\sim} \hat{G}_2$ algebraisch, d. h., er wird induziert von einem Isomorphismus polarisierter abelscher Varietäten $G_{1,\eta} \xrightarrow{\sim} G_{2,\eta}$.

<u>Beweis</u>: Es ist stets erlaubt, zu einer endlichen Erweiterung von K überzugehen. Weiter dürfen wir annehmen, daß $\underline{M}_1 \cong \underline{M}_2 \cong \underline{M}$. Dann sind $\hat{\underline{L}}_1$ und $\hat{\underline{L}}_2$ isomorph zum Pullback von $\underline{M}$ auf $\hat{G}_1 \cong \hat{G}_2 = \hat{G}$. Diese Isomorphismen respektieren die kubische Struktur, sind aber nicht unbedingt eindeutig. Sie liefern aber kanonische Isomorphismen

$$\hat{\underline{L}}_1 \otimes [-1]^*\hat{\underline{L}}_1 \cong \hat{\underline{L}}_2 \otimes [-1]^*\hat{\underline{L}}_2 \quad = \text{Pullback}$$

von $\underline{M} \otimes [-1]^*\underline{M}$.

Wir zeigen, daß sich bei diesem Isomorphismus die algebraischen Schnitte $\Gamma(G_1, \underline{L}_1 \otimes [-1]^*\underline{L}_1)$ und $\Gamma(G_2, \underline{L}_2 \otimes [-1]^*\underline{L}_2)$ entsprechen. Genauer gesagt zeigen wir, daß man ein Erzeugendensystem der algebraischen Schnitte von $\underline{L}_1 \otimes [-1]^*\underline{L}$ oder von $\underline{L}_2 \otimes [-1]^*\underline{L}_2$ erhält durch die Reihen

$$\sum_{\beta \in X} b(\rho+\beta,\beta)\ \underline{c}(\beta)^*(f) \quad .$$

Dabei durchläuft $\rho \in X$ ein Vertretersystem für $X/2X$, und f eine Basis der globalen Schnitte von $\underline{M} \otimes [-1]^*\underline{M}$. Wähle wie bisher $H \subseteq \hat{G}[2]$ endlich und flach, maximal isotrop, mit $H \supseteq T[2]$. Dann operiert H auf $\underline{L}_1 \otimes [-1]^*\underline{L}_1$ und $\underline{L}_2 \otimes [-1]^*\underline{L}_2$, ähnlich wie bisher. Es ist bekannt, daß für $j = 1,2$ $\Gamma(G_j, \underline{L}_j \otimes [-1]^*\underline{L}_j)$ eine Basis aus H-Eigenvektoren besitzt, wobei jeder Charakter $\varepsilon : H(R) \to \{\pm 1\}$ genau einmal vorkommt. Wenn $\theta_{\underline{L}_j} \in \Gamma(G_j, \underline{L})$ ein nicht verschwindendes Element ist, so liegt für $y \in G_j(R)$

$$\sum_{z \in H(R)} \varepsilon(z)\theta_{\underline{L}_j}(x+y+z)\theta_{\underline{L}_j}(-x+y+z)$$

im ε-Eigenraum, und man kann durch Wahl von y in einer Zariski-dichten Menge von $G_j(R)$ erreichen, daß dies $\neq 0$ wird. Rechnen wir nun formal:

$$\hat{\theta}_{\underline{L}_j}(x) = \sum_{\mu \in X} a_j(\mu)\theta^{\mu}_{\underline{M}}(x) \quad (\text{dabei } \underline{L}_j \cong \text{Pullback von } \underline{M})$$

Wähle $\rho \in X$ mit $\rho|\hat{T}[2] = \varepsilon|T[2]$

$\Rightarrow$

$$\sum_{z \in H(R)} \varepsilon(z)\hat{\theta}_{\underline{L}_j}(x+y+z)\theta_{\underline{L}_j}(-x+y+z)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta \in X \\ z \in H(R)}} \varepsilon(z)a_j(\rho+\alpha+\beta)a_j(\alpha-\beta)\theta_{\underline{M}}^{\rho+\alpha+\beta}(x+y+z)\theta_{\underline{M}}^{\alpha-\beta}(-x+y+z)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha,\beta \in X \\ z \in H(R)}} \varepsilon(z)a_j(\rho+\alpha)a_j(\alpha)b(\rho,\beta)b(\beta,\beta)\cdot$$

$$\cdot\underline{c}(\beta)^*(\theta_{\underline{M}}^{\rho+\alpha}(x+y+z) \otimes \theta_{\underline{M}}^{\alpha}(-x+y+z)) \quad .$$

$$= \sum_{\beta \in X} b(\rho+\beta,\beta)\ \underline{c}(\beta)^*\Big(\sum_{\substack{\alpha \in X \\ z \in H(R)}} \varepsilon(z)a_j(\rho+\alpha)a_j(\alpha)\underline{\theta}_M^{\rho+\alpha}(x+y+z)\theta_{\underline{M}}^{\alpha}(-x+y+z)\Big)$$

Die innere Summe ist ein Schnitt von $\underline{M}_\rho \otimes [-1]^*\underline{M}$, (welcher noch von y abhängt), der sich unter H (bei einer geeignet zu definierenden Operation von H auf diesem Bündel) als Eigenvektor transformiert. Der zugehörige Charakter ist unabhängig von $j = 1,2$, und somit sind die inneren Summen Vielfache voneinander, für $j = 1,2$. Es folgt, daß der formale Isomorphismus $\hat{\underline{L}}_1 \otimes [-1]^*\hat{\underline{L}}_1 \cong \hat{\underline{L}}_2 \otimes [-1]^*\hat{\underline{L}}_2$ einen Isomorphismus

$$\Gamma(G_{1,\eta}, \underline{L}_1 \otimes [-1]^*\underline{L}_1) \cong \Gamma(G_{2,\eta}, \underline{L}_2 \otimes [-1]^*\underline{L}_2)$$

induziert, und damit auch einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(G_{1,\eta}, \underline{L}_1{}^n \otimes [-1]^*\underline{L}_1{}^n) \cong \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(G_{2,\eta}, \underline{L}_2{}^n \otimes [-1]^*\underline{L}_2{}^n)$$

Dies liefert aber unmittelbar die Behauptung.

§ 3 Mumford's Konstruktion

a) In diesem Kapitel liefern wir eine Art Umkehrung der vorhergehenden Betrachtungen. Dazu sei R ein exzellenter normaler Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, so daß R komplett ist in der I-adischen Topologie.

Ferner geben wir vor:

a) eine abelsche Varietät A über R , zusammen mit einem amplen Geradenbündel $\underline{M}$ auf A .

b) Eine Erweiterung $\tilde{G}$ von A durch einen Torus $T \cong G_m^r$:
$0 \to T \to \tilde{G} \to A \to 0$

c) Eine Bilinearform b auf $X = X(T)$, mit Werten in K^* (K = Quotientenkörper von R):
$b : X \times X \to K^*$.
Dabei sei $b(\mu,\mu) \in I$, falls $\mu \neq 0$.

Unser Ziel ist es, eine semiabelsche Varietät G über R zu konstruieren, so daß b die Koeffizienten der zugehörigen θ-Reihe liefert (Falls $\underline{M}$ eine prinzipale Polarisation definiert). Etwas allgemeiner ist das Datum c) folgendes:

i) eine Untergruppe $Y \subseteq X$ von endlichem Index

ii) eine lineare Abbildung $i : Y \to \tilde{G}(K)$

iii) eine lineare Abbildung $\underline{c} : X \to A(R)$,
so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{G}(K) \arrow[d] \\ A(R) \arrow[r] & A(K) \end{tikzcd}$$

iv) Ein System von Isomorphismen
$\underline{c}(\mu)^*(\mathcal{O}_\nu) \cong \mathcal{O}_\nu$, $\mu \in Y, \nu \in X$,
linear in μ und ν

v) Ein System von Isomorphismen
$\underline{M}_\mu = \underline{M} \otimes \mathcal{O}_\mu \cong \underline{c}(\mu)^*(\underline{M})$, $\mu \in Y$,
so daß für $\mu, \nu \in Y$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \underline{c}(\mu+\nu)^*(\underline{M}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \underline{c}(\mu)^*(\underline{c}(\nu)^*(\underline{M})) \arrow[r, "\sim"] & \underline{c}(\mu)^*(\underline{M}_\nu) \arrow[d, "\wr"] \\ \underline{M}_{\mu+\nu} & \underline{M}_\mu \otimes \mathcal{O}_\nu \arrow[l, "\sim"'] & \underline{c}(\mu)^*(\underline{M}) \otimes \underline{c}(\mu)^*(\mathcal{O}_\nu) \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

vi) Eine Bilinearform
$b : Y \times X \to K^*$
symmetrisch auf Y , mit $b(\mu,\mu) \in I$, falls $\mu \in Y$, $\mu \neq 0$.

Die Abbildungen in ii), iv) und vi) sollen kompatibel sein in dem folgenden Sinne: b entspricht einer Abbildung $Y \xrightarrow{b} T(K)$. Dann sei für $\mu \in Y$ $i(y)b(y)^{-1} \in \tilde{G}(R)$, und die Isomorphismen in iv) werden definiert durch Translation mit diesem Element.

Wir definieren auf den Daten noch eine Äquivalenzrelation, wie folgt: Sei $c : Y \times X \to R^*$ eine Bilinearform, so daß eine Funktion $q : Y \to R^*$ existiert mit

$$c(\mu,\nu) = q(\mu+\nu)\, q(0)/(q(\mu) \cdot q(\nu)) \qquad \mu,\nu \in Y$$

Dann erlauben wir, daß man die Isomorphismen in v) mit $q(\mu)$, die in iv) mit $c(\mu,\nu)$ multipliziert, und schließlich b durch $b \cdot c$ ersetzt. Aus der Definitheit der Form b folgt sofort, daß $i : Y \to G(K)$ eine Injektion ist.

b) Wir werden einen Quotienten $G = \tilde{G}/i(Y)$ definieren, so daß G eine abelsche Varietät ist, mit einer Polarisation vom $\mathrm{Grad}(M)\cdot[X:Y]$. Dies wurde von Mumford in [M4] durchgeführt für den Fall, daß $\tilde{G} = T$ ein Torus ist.

Von nun an folgen wir den Ausführungen in [M4], § 2,3,4:

<u>Definition</u>: ([M4], Definition 2.1). Ein relativ komplettes Modell besteht aus

a) Ein Schema P über A, integer, lokal von endlichem Typ
b) Eine offene Einbettung $i : \tilde{G} \subseteq \tilde{P}$
c) Ein invertierbares Geradenbündel $\underline{L}$ auf $\tilde{P}$
d) Eine Aktion von $\tilde{G}$ auf $(\tilde{P},\underline{L})$, welche die Translationsoperation von $\tilde{G}$ auf $\tilde{G}$ fortsetzt. Bezeichnung: $(T_g, T_g{}^*)$
e) Eine Operation von Y auf $(P, \underline{L} \otimes \text{Pullback von } \underline{M})$ Bezeichnung: $(S_\mu, S_\mu{}^*)$

Diese mögen erfüllen:

i) Es gibt $U \subset \tilde{P}$ offen, von endlichem Typ, so daß $\tilde{P} = \bigcup_{\mu\in Y} S_\mu(U)$.
ii) Sei $v \in \mathbb{R}(\tilde{G})$ eine Bewertung auf dem Funktionenkörper $K(\tilde{G})$ von $\tilde{G}$, welche ≥ 0 ist auf R. Sei $x \in A$ das Zentrum von v auf A (A ist komplett), und für $\nu \in X$ sei χ_ν ein lokales (in x) Erzeugendes von $\mathcal{O}_\nu$. χ_ν ist eindeutig bestimmt bis auf eine Einheit in $\mathcal{O}_{A,x}$, und ein Element aus $K(\tilde{G})$. Dann gilt:

   v hat Zentrum auf $\tilde{P}$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\, \nu \in X,\ \exists \mu \in Y$ mit $v(\chi_\nu \cdot b(\mu,\nu)) \geqq 0$ (es reicht dabei, $\nu \in Y$ zu betrachten).
iii) Auf $\tilde{G}_\eta$ operieren Y und $\tilde{G}$ durch Translationen. (Es folgt, daß S_μ und T_g auf $\tilde{P}$ kommutieren, und daß $S_\mu{}^*(\underline{M}) \cong \underline{c}(\mu)^*(\underline{M}))$.
iv) Sei $\mu \in Y$. Dann ist $\underline{c}(\mu)^*(\underline{M}) \cong \underline{M} \otimes \mathcal{O}_\mu$, und somit induziert $S_\mu{}^*$ einen Isomorphismus $\tilde{S}_\mu{}^* : S_\mu{}^*(\underline{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{L} \otimes \mathcal{O}_{-\mu}$. Weiter ist für $g \in \tilde{G}$, mit Bild $x \in A$, kanonisch $x^*(\mathcal{O}_{-\mu}) \cong \mathcal{O}_{-\mu}$, via Translation mit g. Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T_g{}^*S_\mu{}^*(\underline{L}) \arrow[r, "\widetilde{S}_\mu{}^*", "\sim"'] \arrow[d, equal] & T_g{}^*(\underline{L}\otimes\mathcal{O}_{-\mu}) = T_g{}^*(\underline{L})\otimes T_g{}^*(\mathcal{O}_{-\mu}) \arrow[d, "\wr\ T_g{}^*"] \\
S_\mu{}^*T_g{}^*(\underline{L}) \arrow[d, "\wr\ T_g{}^*"] & \underline{L}\otimes T_g{}^*(\mathcal{O}_{-\mu}) \arrow[d, equal] \\
S_\mu{}^*(\underline{L}) \arrow[r, "\widetilde{S}_\mu{}^*", "\sim"'] & \underline{L}\otimes\mathcal{O}_{-\mu} \xleftarrow{\ \sim\ } \underline{L}\otimes x^*(\mathcal{O}_{-\mu})
\end{tikzcd}$$

v) $\underline{L}\otimes\underline{M}$ ist ample auf $\widetilde{P}$.

Bemerkung:

Die Bedingung iv) wird etwas einfacher, falls $g\in T$, also $x = 0$. Der Isomorphismus $x^*(\mathcal{O}_{-\mu}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{-\mu}$ ist Multiplikation mit $\mu(g)^{-1}$, und man kann die Kommutativität schreiben als

$$T_g{}^*\widetilde{S}_\mu{}^* = \mu(g)\ \widetilde{S}_\mu{}^*\ T_g{}^* \quad .$$

Bemerkung: Man kann die Kompatibilität iv) umformulieren: Es reicht, sie auf $\widetilde{G}_\eta \subseteq \widetilde{P}_\eta \subseteq \widetilde{P}$ zu verifizieren. Zunächst liefern die T_g^* eine äquivariante Operation von $\widetilde{G}$ auf $\underline{L}|\widetilde{G}$, und damit wird $\underline{L}|\widetilde{G}$ $\widetilde{G}$-linear trivial: $\underline{L}|\widetilde{G} = \mathcal{O}_{\widetilde{G}}$. (kanonisch bis auf Einheit aus R^*). Ebenso operiert $\widetilde{G}$ auf dem Pullback von $\mathcal{O}_\nu$ auf $\widetilde{G}$, und es ist kanonisch Pullback $(\mathcal{O}_\nu) = \mathcal{O}_{\widetilde{G}}$. (Achtung: $T\subseteq\widetilde{G}$ operiert kanonisch auf dem Pullback von $\mathcal{O}_\nu$, doch unterscheidet sich diese Operation um den Charakter ν von der Einschränkung der $\widetilde{G}$-Operation). Sei nun $\mu\in Y$, $i(\mu)\in\widetilde{G}(K)$. Dann ist auf $\widetilde{G}_\eta$ $S_\mu = T_{i(\mu)}$, somit $S_\mu{}^*(\underline{L}|\widetilde{G}_\eta) \cong \underline{L}|G_\eta$. Der Isomorphismus $S_\mu{}^*$: $S_\mu{}^*(\underline{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{L}\otimes\mathcal{O}_{-\mu} \xrightarrow{\sim} \underline{L}$ wird auf $\widetilde{G}_\eta$ gegeben durch eine globale Einheit auf $\widetilde{G}_\eta$. Dann bedeutet Bedingung iv), daß diese Funktion konstant ist, also gegeben durch ein $a(\mu)\in K^*$. Analog ist $S_\mu{}^* = a(\mu)\cdot\underline{c}(\mu)^*$:

$$\begin{aligned} S_\mu{}^*(\underline{M}\otimes\underline{L}|\widetilde{G}_\eta) \cong S_\mu{}^*(\underline{M}|\widetilde{G}_\eta) &\xrightarrow{\sim} \underline{c}(\mu)^*(\underline{M}|\widetilde{G}_\eta) \\ \xrightarrow{\sim} (\underline{M}\otimes\mathcal{O}_\mu|\widetilde{G}_\eta) \xrightarrow{\sim} (\underline{M}\otimes\underline{L}\otimes\mathcal{O}_\mu)|\widetilde{G}_\eta &\xrightarrow{\sim} (\underline{M}\otimes\underline{L})|\widetilde{G}_\eta \ . \end{aligned}$$

Es ist $a(0) = 1$, $a(\mu+\nu) = a(\mu)\ a(\nu)\ b(\mu,\nu)$. (Man beachte, daß auf

$\tilde{G}_\eta$ die beiden Isomorphismen Pullback$(\underline{c}(\mu)^*(\mathcal{O}_\nu) \xrightarrow{\sim} T^*_{i(\mu)}$ (Pullback $(\mathcal{O}_\nu)) \xrightarrow{\sim}$ Pullback $(\mathcal{O}_\nu)$ sich um $b(\mu,\nu)$ unterscheiden: Der eine Isomorphismus ist Pullback des entsprechenden Isomorphismus auf A, der andere kommt von der Operation von $i(\mu)$ auf Pullback $(\mathcal{O}_\nu))$.

Beispiel ([M4], 2.3-2.5.)

Wir konstruieren unter bestimmten Voraussetzungen ein relativ komplettes Modell. Diese sind:

Sei $\Sigma \subset X$ ein Erzeugendensystem, $0 \in \Sigma = -\Sigma$. Wähle eine Funktion $a : Y \to K^*$ mit $a(0) = 1$, $a(\mu+\nu) = b(\mu,\nu)\, a(\mu)a(\nu)$. (Man zeigt leicht, daß ein solches a existiert). Es gelte

$$(*) \quad a(\mu)\ b(\mu,\alpha) \in R \quad \text{für} \quad \mu \in Y, \alpha \in \Sigma.$$

Im allgemeinen kann man kein solches $a(\ )$ finden. Dies hängt damit zusammen, daß wir auch ein Geradenbündel auf der abelschen Varietät konstruieren wollen, welches die Polarisation induziert. In den uns interessierenden Fällen wird dies aber kein Problem sein. Zum Beispiel kann man $(*)$ stets erfüllen, wenn R faktoriell ist, und man Y durch $n \cdot Y$ ersetzt, n genügend groß.

Betrachte die beiden folgenden quasikohärenten graduierten Algebren $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ über A :

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{O}_A \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{O}_{\tilde{G}}\, \theta^n = \mathcal{O}_A \oplus \bigoplus_{\substack{n\geq 1\\ \nu\in X}} \mathcal{O}_\nu \cdot \theta^n$$

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{O}_A \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{O}_{\tilde{G}}\, \underline{M}^n \cdot \theta^n = \mathcal{O}_A \oplus \bigoplus_{\substack{n\geq 1\\ \nu\in X}} (\underline{M}^n \otimes \mathcal{O}_\nu) \cdot \theta^n$$

$\tilde{G}$ operiert offensichtlich auf $\mathcal{S}_1$ (θ bleibt fest) , und Y operiert auf $\mathcal{S}_2 \otimes_R K$, nach der Regel

$$S_\mu^*(\phi \cdot f_\nu \theta^n) = a(\mu)^n b(\mu,\nu)\ \underline{c}(\mu)^*(\phi)\ \underline{c}(\mu)^*(f_\nu) \cdot \theta^n$$
$$= a(\mu)^n \underline{c}(\mu)^*(\phi)\, i(\mu)^*(f_\nu \theta^n) \in \underline{M}^n \otimes \mathcal{O}_{\nu+n\mu} \otimes_R K \cdot \theta^n$$

$(\phi \in \underline{M}^n,\ f_\nu \in \mathcal{O}_\nu$ lokale Schnitte)

$\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{S}_1 \otimes_R K$ sei der Unterring, welcher erzeugt wird von

$$\{a(\mu)\ b(\mu,\alpha)\ \mathcal{O}_{\mu-\alpha}\cdot\theta \mid \mu \in Y, \alpha \in \Sigma\}$$

und $\mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{S}_2 \otimes_R K$ werde erzeugt von

$$\{S_\mu{}^*(\underline{M} \otimes \mathcal{O}_\alpha \cdot \theta\ ) \mid \mu \in Y, \alpha \in \Sigma\}$$

Dann ist $\tilde{P} = \mathrm{Proj}_A(\mathfrak{R}_1) = \mathrm{Proj}_A(\mathfrak{R}_2)$ ein relativ komplettes Modell: $\tilde{G}$ operiert auf $(\mathrm{Proj}_A(\mathfrak{R}_1), \mathcal{O}(1)) = (\tilde{P}, \underline{L})$, und Y auf $(\tilde{P}, \underline{L} \otimes \underline{M})$. Für $\alpha \in \Sigma, \theta \in \Gamma(A, \underline{M} \otimes \mathcal{O}_\alpha)$ ist $\theta \cdot \Theta$ ein globaler Schnitt in $\Gamma(\tilde{P}; \underline{L} \otimes M)$, und $U_{0,\alpha,\theta\cdot\Theta} = P - V(\theta\cdot\Theta)$ ist affin und von endlichem Typ /R . Da die θ's $\underline{M} \otimes \mathcal{O}_2$ erzeugen, überdecken die offenen Mengen $U_{\mu,\alpha,\theta\cdot\Theta} = S_\mu(U_{0,\alpha,\theta\cdot\Theta})$ ganz P , und $U_{0,0,\theta\cdot\Theta} \cong \tilde{G} - V(\theta)$.

Wenn man θ eine Basis von $\Gamma(A, \underline{M} \otimes \mathcal{O}_\alpha)$ durchlaufen läßt, erhält man auf diese Weise eine Überdeckung von $\tilde{P}$ wie in i). Die Bedingung ii) zeigt man wie in [M4], iii) ist leicht, v) schon gezeigt, und iv) rechnet man einfach nach.

Von nun an bezeichne $(\tilde{P}, \underline{L}, \ldots)$ ein relativ komplettes Modell. Es folgen nun eine Reihe von Tatsachen, welche den Sätzen aus [M4], § 3, und 4 entsprechen:

<u>[M4], 3.1</u>:

Sei $\mu \in Y$, und $f = b(\mu,\mu) \in R$. Das Pullback von $\mathcal{O}_\mu$ auf $\tilde{G}$ besitzt ein kanonisches Erzeugendes $h_\mu \in \Gamma(\tilde{G}, \mathcal{O}_\mu)$. (Das direkte Bild von $\mathcal{O}_{\tilde{G}}$ bei $\tilde{G} \to A$ ist die direkte Summe aller $\mathcal{O}_\nu, \nu \in X$) . Dann dehnt sich h_μ aus zu einem regulären Schnitt des Pullbacks von $\mathcal{O}_\mu$ auf $\tilde{P}_f = \tilde{P} \otimes_R R_f$, welcher dort $\mathcal{O}_\mu$ erzeugt.

<u>Beweis</u>: Aus den Verträglichkeitsbedingungen zu Anfang dieses Kapitels folgt $i(\mu) \in \tilde{G}(R_f)$. Auf $\tilde{P}_f$ stimmen dann S_μ und $T_{i(\mu)}$ überein, und die Isomorphismen

$$\tilde{S}_\mu{}^* : S_\mu{}^*(\underline{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{L} \otimes \mathcal{O}_{-\mu} \quad \text{und} \quad T_{i(\mu)}{}^* : T_{i(\mu)}{}^*(\underline{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{L}$$

liefern einen globalen Schnitt von $\mathcal{O}_\mu$ über $\tilde{P}_f$, welcher das Bündel dort erzeugt.

Die Einschränkung dieses Schnittes auf $\tilde{G}$ transformiert sich unter T gemäß $-\mu$, genauso wie h_μ . Also stimmen die beiden bis auf eine Einheit überein.

[M4], 3.2:

$\tilde{P}_\eta = \tilde{G}_\eta$

[M4], 3.3:

Jede irreduzible Komponente von $\tilde{P}_0 = \tilde{P} \otimes_R (R/I)$ ist eigentlich über R/I .

Beweis: Sei Z eine irreduzible Komponente von $\tilde{P}_0$, v eine Bewertung des Funktionenkörpers $K(Z)$, $v \geq 0$ auf R . Wähle eine Bewertung v_1 von $K(\tilde{G})$ ($v_1 \geq 0$ auf R) mit Zentrum Z , und sei v_2 das Kompositum von v und v_1 . Für $\mu \in Y$ sei $h_\mu \in \Gamma(\tilde{G}, \mathcal{O}_\mu)$ das kanonische erzeugende Element. Nach unserem Analogon zu [M4]3.1 ist für $n \gg 0$ $b(\mu,\mu)^n \cdot h_\mu$ regulär im generischen Punkt von Z , und verschwindet dort. Sei $x \in A$ das Zentrum von v_2 auf A , und ℓ_μ ein lokales Erzeugendes von $\mathcal{O}_\mu$ nahe x . Dann ist $b(\mu,\mu)^n \cdot h_\mu \cdot$ (Pullback von ℓ_μ) regulär und gleich Null im generischen Punkt von Z , hat also bei v_2 Bewertung >0 . Somit ist auch $v_2\ (\chi_\mu\ b(n\mu,\mu)) > 0$, im Sinne der Bedingung ii) bei der Definition eines relativ kompletten Modells. ($h_\mu \in R^* \cdot \chi_\mu \cdot \ell_\mu$) . Dies gilt für alle $\mu \in Y$. Somit hat v_2 ein Zentrum auf $\tilde{\tilde{P}}$ und v eins auf Z . Mache weiter wie in [M4].

[M4], 3,5:

Sei $U_0 = U \otimes_R {}^R/I$, (U wie in Bedingung i) an $\tilde{P}$) $\bar{U}_0$ ist eigentlich über R/I .

[M4], 3.6:

Es gibt eine endliche Teilmenge $S \subseteq Y$, so daß für $\mu,\nu \in Y$, $\mu-\nu \notin S$

$$S_\mu(\bar{U}_0) \cap S_\nu(\bar{U}_0) = \emptyset \quad .$$

Beweis:

Seien $F \subset \tilde{P}$ die Fixpunkte unter $T \subset \tilde{G}$. Für jede zusammenhängende Teilmenge $F' \subseteq F$ operiert T auf $\underline{L}|F'$ via einen Charakter $\nu \in X$, und auf $\underline{L}|S_\mu(F')$ via $\nu+\mu$. Also ist für $\mu \neq 0$ $F' \cap S_\mu(F') = \emptyset$. Weiter wie in [M4].

[M4], 3.7:

Y operiert frei auf $\tilde{P}_0$.

[M4], 3.8:

$\tilde{P}_0$ ist zusammenhängend

Beweis:

Genauso wie in [M4]: $\tilde{G}_0 \subseteq \tilde{P}_0$ definiert eine Zusammenhangskomponente von $\tilde{P}_0$. Wenn es eine zweite gibt, wähle eine diskrete Bewertung v von $K(\tilde{G})$ mit Zentrum in dieser Zusammenhangskomponente. Sei $R' = \{f \in K(A) \,|\, v(f) \geq 0\}$. Ersetze $\tilde{P}$ durch den Abschluß der generischen Faser von $\tilde{P} \times_A \mathrm{Spek}(R')$, und wende [M4] , 3.9. an.

[M4], 3.10:

Für $n \geq 1$ existiert ein Schema P_n , projektiv über A/I^n , mit amplem Geradenbündel $\mathcal{O}(1)$, und ein étaler surjektiver Morphismus

$$\pi : \tilde{P} \otimes_R (R/I^n) \to P_n \quad ,$$

welcher $(P_n, \mathcal{O}(1))$ zum Quotienten unter Y macht von $(\tilde{P} \otimes_R (R/I^n), \underline{L} \otimes \underline{M})$.

Die P_n definieren ein formales Schema $\mathcal{P}$ über R , welches algebraisch ist. Wir erhalten also ein projektives P über R , mit $\hat{P} = \mathcal{P}$. P trägt ein amples Geradenbündel $\mathcal{O}(1)$. Außerdem hat man ein abgeschlossenes Unterschema $B \subseteq P$, so daß $\hat{B}$ = Quotient von $(\hat{P} - \bigcup_{\mu \in Y} S_\mu(\tilde{G}))^\wedge / Y$. Sei $G = P - B$. Es ist $\hat{G} = \hat{\tilde{G}}$.

[M4], 4.2:

G ist glatt über R .

[M4], 4.3:

P ist irreduzibel

Definition ([M4], 4.4)

Eine semiabelsche Untergruppe $\tilde{G}_1 \subseteq \tilde{G}$, $0 \to T_1 \to \tilde{G} \to A_1 \to 0$ heißt integrabel, falls gilt:

i) $Y_1 = i^{-1}(G_1(R))$ hat denselben Rang wie der Torus T_1 von $\tilde{G}_1$.

ii) $\underline{c}(Y_1) \subseteq A_1(R)$

iii) Für $\nu \in X, \nu | T_1 = 1$ und $\mu \in Y_1$ ist der Isomorphismus $\underline{c}(\mu)^* \mathcal{O}_\nu \cong \mathcal{O}_\nu$ auf A_1 die Identität $(\mathcal{O}_\nu | A_1 \cong \mathcal{O})$

Beispiele integrabler Untergruppen erhält man etwa durch Graphen der Multiplikation $m : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ oder der Inversenabbildung $[-1] : \tilde{G} \to \tilde{G}$.

Es gilt:

Jede integrable Untergruppe $\tilde{G}_1 \subseteq \tilde{G}$ definiert ein abgeschlossenes Unterschema $G_1 \subseteq G$, wie folgt:

a) Sei W_1 der Abschluß von $\tilde{G}_1$ in $\tilde{P}$. Dann ist W_1 Y_1-invariant.

b) Sei $\mathcal{W}_1$ die I-adische Komplettierung von W_1 . $\mathcal{W}_1$ ist ebenfalls Y_1-invariant, und die Vereinigung $\mathcal{W}_2 = \bigcup_{\mu \in Y/Y_1} S_\mu(W_1)$ ist lokal endlich (dies definiert $\mathcal{W}_2$ als reduziertes Unterschema von $\mathcal{P}$).

c) Sei $\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_2 / Y \subset \mathcal{P}$

d) Sei $W_3 \subseteq P$ definiert durch $\hat{W}_3 = \mathcal{W}_3$.

e) $G_1 = W_3 \cap G$.

Nur Schritt b) ist nicht trivial. Er folgt aus einer Variante von [M4];

Prop. 4.5, wobei man im Beweis benutzt, daß für $\mu \in Y$ und $n >> 0$ $b(\mu,\mu)^n \cdot h_\mu$ (h_μ = kanonisches Erzeugendes auf $\tilde{G}$ des Pullbacks von $\mathcal{O}_\mu$) auf U ein regulärer Schnitt des Pullbacks von $\mathcal{O}_\mu$ ist, welcher auf U_0 verschwindet. Man beachte auch, daß für $\nu \in X$ mit $\nu|T_1 = 1$ das Pullback des Geradenbündels $\mathcal{O}_\nu$ auf W_1 kanonisch trivial ist, wobei die Trialisierung auf $\tilde{G}_1$ durch h_ν gegeben wird.

Es folgt:

[M4], 4.8, 4.9:

G ist ein Gruppenschema über R , und $G_\eta = P_\eta$ ist abelsche Varietät.

Weiter können wir die Struktur der Torsions-Untergruppen von G bestimmen:

Die Multiplikation auf $\tilde{G}$ setzt sich fort zu einer Multiplikation auf $\tilde{G}^* = \bigcup_{\mu \in Y} S_\mu(\tilde{G}) \subseteq \tilde{P}$, und jedes $\mu \in Y$ definiert ein $\sigma_\mu \in \tilde{G}^*(R)$.
Für $n \geq 1$ sei $Z_\mu^{(n)} \subseteq G^*$ das Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} Z_\mu^{(n)} & \longrightarrow & G^* \\ \downarrow & & \downarrow n \\ \{\sigma_\mu\} & \longrightarrow & G^* \end{array}$$

Für $\nu \in Y$ liefert Translation mit σ_ν einen Isomorphismus $Z_\mu^{(n)} \xrightarrow{\sim} Z_{\mu+n\nu}^{(n)}$, und die disjunkte Vereinigung $\coprod_{\mu \in Y/nY} Z_\mu^{(n)}$ wird zu einem Gruppenschema über R .

[M4], 4.10:

Der Kern $G^{(n)}$ der Multiplikation mit n auf G ist isomorph zu $\coprod_{\mu \in Y/nY} Z_\mu^{(n)}$.

Beweis:

Wie in [M4] .

[M4], 4.11:

Sei $\underline{p} \subseteq R$ ein Primideal, $Y_1 = \{\mu \in Y \mid b(\mu,\mu) \notin \underline{p}\}$, $s_1 \in \mathrm{Spek}(R)$ der zugehörige Punkt. Dann ist Y_1 eine Untergruppe von Y, Y/Y_1 ist torsionsfrei, und es gibt exakte Sequenzen von Gruppenschemata über dem Körper $k(s_1)$:

$$0 \to \tilde{G}^{(n)}_{s_1} \to G^{(n)}_{s_1} \to Y_1/nY_1 \quad \to 0$$

$$0 \to \tilde{G}^{tor}_{s_1} \to G^{tor}_{s_1} \to Y_1 \otimes (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$$

[M4], 4,12:

G ist semiabelsch

c) Das ample Geradenbündel $\mathcal{O}(1)$ auf P erfüllt $\mathcal{O}(\hat{1})|\hat{G} \cong \hat{\underline{L}} \otimes \hat{\underline{M}}$ $(\hat{G} \cong \hat{\tilde{G}})$. Da $\tilde{G}$ auf $\underline{L}|\tilde{G}$ operiert, ist $\underline{L}|\tilde{G}$ kanonisch trivial, und somit erhält $\hat{\underline{L}} \otimes \hat{\underline{M}} \cong \hat{\underline{M}}$ eine kubische Struktur. Wir zeigen, daß diese mit der kubischen Struktur auf $\mathcal{O}(\hat{1})$ übereinstimmt. Dies ist der Fall, wenn die kubische Struktur auf $\mathcal{O}(\hat{1})$ verträglich ist mit der T-Operation (T operiert auf $\hat{\underline{L}}$ und (trivial) auf $\hat{\underline{M}}$). Dies ergibt sich aus den nun folgenden Überlegungen:

Für $J \subseteq \{1,2,3\}$ erhält man durch Addition der Koordinaten in J einen Morphismus $m_J : \tilde{G}^3 \to \tilde{G}$, und zusammen ein

$$\underline{m} = \Pi m_J : \tilde{G}_1 = \tilde{G}^3 \to \tilde{G}^8 .$$

Der Graph von $\underline{m}$ ist eine integrable Untergruppe von $\tilde{G}^{11}$. Man findet dann ein relativ komplettes Modell $\tilde{P}_1$ für $\tilde{G}_1$, so daß $\underline{m}$ sich fortsetzt zu $\underline{m} : \tilde{P}_1 \to \tilde{P}^8$.

Wegen der kubischen Struktur auf $\underline{M}$ ist $\underline{m}^*(\bigotimes_J \underline{M}^{\pm 1})$ trivial (die Exponenten ergeben sich als $(-1)^{|J|}$ auf dem Faktor J). Dann ist

$$\underline{m}^*(\bigotimes_J \mathcal{O}(1)^{\pm 1}) \cong \underline{m}^*(\bigotimes_J (\hat{\underline{L}} \otimes \hat{\underline{M}})^{\pm 1}) \cong \underline{m}^*(\bigotimes_J \underline{L}^{\pm 1})$$

Darauf operieren G_1 und $Y_1 = Y^3$. Es gilt nun, daß die Operationen von $T_1 = T^3$ und Y_1 kommutieren:

Für $(g_1, g_2, g_3) \in T_1$ und $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in Y_1$ ist

$$\prod_J \left(\prod_{j,k \in J} \mu_j(g_k) \right)^{\pm 1} = 1$$

Da die kubische Struktur auf $\hat{\mathcal{O}}(1)$ durch ihre Y-Invarianz eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung.

Weiter können wir den Grad der durch $\mathcal{O}(1)$ auf G_η definierten Polarisation berechnen:

Er ist gleich dem Rang des torsionsfreien R-Moduls $\Gamma(P, \mathcal{O}(1)) = \Gamma(\hat{\tilde{P}}, \hat{\underline{L}} \otimes \hat{\underline{M}})^Y$. (Y-Invarianten). Wir ersetzen zunächst $\hat{P}$ durch seine Normalisierung, was nichts an diesen Invarianten ändert. Sei $\hat{\theta} \in \Gamma(\hat{\tilde{P}}, \hat{\underline{L}} \otimes \hat{\underline{M}})$. Da $T \subseteq G$ auf $\underline{L}$ und (trivial) auf $\underline{M}$ operiert, kann man $\hat{\theta}$ nach T-Eigenfunktionen entwickeln:

$$\hat{\theta} = \sum_{\nu \in X} \theta(\nu)$$

Aus den Kommutationsregeln zwischen Y und T folgt, daß für $\mu \in Y$ $S_\mu^*(\theta(\nu)) \in \underline{L} \otimes \underline{M}_{\mu+\nu}$.

Wenn also θ Y-invariant ist, muß gelten:

$$\theta(\mu+\nu) = S_\mu{}^*(\theta(\nu))$$

Andererseits kann man für jedes $\nu \in X$ den Rang des ν-Eigenraums in $\Gamma(\hat{\tilde{P}}, \underline{L} \otimes \underline{M})$ abschätzen:

$$\Gamma(\hat{\tilde{P}}, \hat{\underline{L}} \otimes \hat{\underline{M}})^\nu \subseteq \Gamma(\hat{\tilde{G}}, \hat{\underline{L}} \otimes \hat{\underline{M}})^\nu \cong \Gamma(A, \underline{M} \otimes \mathcal{O}_\nu)$$

(Da $\hat{\underline{L}} | \hat{\tilde{G}}$ trivial).

Insgesamt folgt:

Rang $(\Gamma(P, \mathcal{O}(1))) \leq [X:Y] \cdot \mathrm{Grad}$ $(\underline{M})$ (Grad $(M)^2$ =Grad der von $\underline{M}$ gelieferten

Abbildung $A \to A^{\text{dual}}$) .

Wir zeigen, daß hier Gleichheit gilt. Dazu bezeichne $H = \mathrm{Ker}(Y) \subseteq T$ das durch X/Y definierte multiplikative Unterschema von T . H operiert auf $(\tilde{P}, \hat{\underline{L}} \otimes \underline{M})$, und diese Operation kommutiert mit Y . Wir können dann zum H-Quotienten übergehen. $(\tilde{P}/H,\ G/H$ u.s.w.) und annehmen, daß $Y = X$. Auf $\hat{G} \cong \hat{\tilde{G}}$ sind $\mathcal{O}(\hat{1})$ und der Pullback von $\hat{\underline{M}}$ isomorph als kubische Bündel. Dann ist bekannt, daß der Grad der Polarisation auf G_η mindestens so groß ist wie der von $\underline{M}$ auf A . Wir hatten jedoch schon eine Abschätzung in die andere Richtung.

Es folgt insgesamt (für beliebiges Y):

$\mathcal{O}(1)$ definiert eine Polarisation vom Grad $[X:Y] \cdot \mathrm{Grad}(\underline{M})$

Da in allen unseren Abschätzungen nun die Gleichheit gilt, können wir auch eine Basis von $\Gamma(G_\eta, \mathcal{O}(1))$ angeben: Sei $\nu \in X, \theta(\nu) \in \Gamma(A, \underline{M} \otimes \mathcal{O}_\nu)$. Dann können wir $\theta(\nu)$ auffassen als Schnitt von $\underline{L} \otimes \underline{M}$ über $\tilde{G}$, welcher sich unter T gemäß ν transformiert. Es folgt: Es gibt ein $r \in R$, $r \neq 0$, so daß sich $r \cdot \theta(\nu)$ ausdehnt zu einem regulären globalen Schnitt aus $\Gamma(\hat{\tilde{P}}, \hat{\underline{L}} \otimes \hat{\underline{M}})^\nu$.

Dann existiert ein $\theta \in \Gamma(P, \mathcal{O}(1))$ mit

$$\hat{\theta} = \sum_{\mu \in Y} S^*_\mu(r \cdot \theta(\nu))$$

Wenn ν ein Vertretersystem für X/Y durchläuft, und $\theta(\nu)$ eine Basis von $\Gamma(A, \underline{M} \otimes \mathcal{O}_\nu)$, so erhält man auf diese Weise eine Basis von $\Gamma(G_\eta, \mathcal{O}(1))$.

Eine andere Schreibweise ist übrigens

$$\hat{\theta} = \sum_{\mu \in Y} a(\mu)\ b(\mu,\nu)\ \underline{c}(\mu)^*\ (r \cdot \theta(\nu)) \quad ,$$

mit einer Funktion $a : Y \to K^*$,

$$a(0) = 1,\ a(\mu+\nu) = a(\mu)\ a(\nu)\ b(\mu,\nu) \quad .$$

Dies erinnert schon an das vorherige Kapitel. Es bleibt uns noch eine

Kleinigkeit:

Wir haben bis jetzt ein relativ komplettes Modell nur unter der Annahme konstruiert, daß

(*) $\underline{M}$ ist sehr ample, und $a(\mu)\, b(\mu,\alpha) \in R$ für

$\mu \in Y$, $\alpha \in \Sigma$. Wir wollen noch aufzeigen, wie man dies fallen lassen kann:

Wir setzen voraus, daß eine Funktion $a(\ ) : X \to K^*$ existiert mit $a(0) = 1$, $a(\mu+\nu) = a(\mu)a(\nu)b(\mu,\nu)$. Außerdem existiere ein $r \in R$, $r \neq 0$, so daß $r \cdot a(\mu) \in R$ für alle $\mu \in X$. Ein solches $a(\ )$ läßt sich in den für uns wichtigen Fällen finden, zum Beispiel wenn R regulär ist.

(*) ist dann immer erfüllt, wenn man für ein genügend großes n $\underline{M}$ ersetzt durch $\underline{M}^n$, Y durch $n \cdot Y$, $i : Y \to \tilde{G}(K)$ durch $i \cdot \frac{1}{n} : nY \to \tilde{G}(K)$, und $a(\ )$ und $b(\ )$ durch ihre Einschränkungen auf nY bzw. $(nY) \times X$. Falls (*) schon erfüllt ist, läuft dies darauf hinaus, $\mathcal{O}(1)$ durch $\mathcal{O}(n)$ zu ersetzen.

Wähle nun n_1, n_2 genügend groß, so daß man zwei semiabelsche Varietäten G_1 und G_2 erhält, mit Geradenbündeln $\underline{N}_1$ und $\underline{N}_2$. Dann ist $(G_1, \underline{N}_1^{n_2}) \cong (G_2, \underline{N}_1^{n_1})$, und man erhält

$$G \cong G_1 \cong G_2$$

mit Geradenbündel $\underline{N}$, $\underline{N}_1 = \underline{N}^{n_1}, \underline{N}_2 = \underline{N}^{n_2}$. Wir benötigen noch Information über die globalen Schnitte $\Gamma(G,\underline{N})$. Wir kennen schon die globalen Schnitte von $\underline{N}_1 = \underline{N}^{n_1}$ und $\underline{N}_2 = \underline{N}^{n_2}$: Man erhält zum Beispiel eine Basis von $\Gamma(G_\eta, \underline{N}^{n_1})$ wie folgt: Durchlaufe ν ein Vertretersystem von $X/n_1 Y$, und $\theta(\nu)$ eine Basis von $\Gamma(A, \underline{M}^{n_1} \otimes \mathcal{O}_\nu)$. Dann gibt es für ein passendes $r \in R$, $r \neq 0$, eine Basis aus Elementen $\theta \in \Gamma(G, \underline{N}^{n_1})$ mit

$$\hat{\theta} = r \cdot \sum_{\mu \in n_1 Y} a(\mu) b(\mu,\nu)\, \underline{c}(\mu)^*(\theta(\nu))$$

Es liegt dann nahe, daß man eine Basis von $\Gamma(G,\underline{N})$ erhält aus θ's mit

$$\hat{\theta} = r \cdot \sum_{\mu\in Y} a(\mu) b(\mu,\nu)\ \underline{c}(\mu)^*(\theta(\nu)) ,$$

$$\nu\in X/Y, \quad \theta(\nu) \in \Gamma(A,\underline{M} \otimes \mathcal{O}_\nu) .$$

Und in der Tat rechnet man nach, daß diese $\hat{\theta}$ folgende Bedingung erfüllen: Für m_1, m_2 ganz und positiv mit $m_1 n_1 - m_2 n_2 > 0$ ist

$$(\hat{\theta})^{m_1 n_1 - m_2 n_2} \cdot \Gamma(G;\underline{N}^{m_2 n_2}) \subseteq \Gamma(G,\underline{N}^{m_1 n_1}) .$$

Daraus folgt, daß dies algebraische Schnitte sind.

Bemerkung:

Die Funktion $a(\mu)$ hängt von der Wahl des relativ kompletten Modells ab (siehe die Bemerkung nach der Definition eines solchen). Wirklich wichtig ist nur die Bilinearform b mit $a(\mu+\nu) = a(\mu)a(\nu)b(\mu,\nu)$.
Der Leser wird sich leicht überzeugen, daß wir in der Tat gezeigt haben, daß man bei passender Wahl des kompletten Modells alle Funktionen $a(\ )$ erhält, welche dieser Gleichung genügen, und für die ein $r \in R$, $r \neq 0$ existiert mit $r \cdot a(\mu) \in R$. Zwei verschiedene unterscheiden sich um einen Homomorphismus $Y \to K^*$.
Wir formulieren nun das Hauptergebnis dieses Kapitels. Der Einfachheit halber betrachten wir nun prinzipale Polarisationen.

Satz 3:

Sei R exzellent normal, I-adisch komplett, Quotientenkörper K, $\tilde{G}$ über R eine semiabelsche Varietät,

$$0 \to T \to \tilde{G} \to A \to 0 ,$$

$T \cong \mathbb{G}_m^r$ zerfallender Torus, Charaktergruppe $X \cong \mathbb{Z}^r$. A = abelsche Varietät.

Das Geradenbündel $\underline{M}$ auf A definiere eine prinzipale Polarisation, mit charakteristischer Abbildung $\underline{c} : X \to A(R)$. Wähle ein zulässiges System von Isomorphismen dafür, sowie eine symmetrische Bilinearform

$b : X \times X \to K^*$, so daß $b(\mu,\mu) \in I$ für $\mu \neq 0$. Dann existiert eine semi-abelsche Varietät G über R , so daß die generische Faser G abelsch ist, und ein Geradenbündel $\underline{N}$ auf G , welches auf G_η eine prinzipale Polarisation definiert.

Es gilt:

i) $(\hat{G},\hat{\underline{N}}) \cong (\hat{\tilde{G}}$, Pullback $(\hat{\underline{M}}))$ mit kubischer Struktur.

ii) Sei $\theta_{\underline{N}} \in \Gamma(G,\underline{N}), \theta_{\underline{N}} \neq 0$, $\theta_{\underline{M}} \in \Gamma(A;\underline{M})$ ein erzeugendes Element.
Dann ist
$\hat{\theta}_{\underline{N}} = \sum_{\mu \in X} a(\mu)\, \underline{c}(\mu)^*(\theta_{\underline{M}})$, mit $a(\mu) \in R$, $a(\mu) \neq 0$, und
$a(\mu+\nu)\; a(0) = a(\mu)\; a(\nu) b(\mu,\nu)$

iii) Im geeignet zu erklärenden Sinne ist
$G = \tilde{G}/i(X)$, wobei
$i : X \to \tilde{G}(K)$ wie folgt zu erklären ist:

Das zulässige System von Isomorphismen liefert eine Liftung von $\underline{c}$ zu einer linearen Abbildung $X \to \tilde{G}(R)$, und b liefert $X \to T(K)$. i ist das Produkt dieser beiden Abbildungen.

d) Abschließend benötigen wir noch einige Anmerkungen zur Kodaira-Spencer Klasse:

Die exakte Sequenz auf G

$$0 \to \Omega^1_R \otimes_R \mathcal{O}_G \to \Omega^1_{\tilde{G}} \to \Omega^1_{G/R} \to 0 \qquad (\Omega^1_R = \Omega^1_{R/\mathbb{Z}})$$

liefert eine Abbildung

$$\kappa : \underline{t}^*_G = \Gamma(G,\Omega^1_{G/R}) \to H^1(G,\Omega^1_R \otimes {}_R\mathcal{O}_{\tilde{G}}) \ .$$

Weiter gibt die erste Chern-Klasse $c(\underline{N}) \in H^1(G,\Omega^1_{G/R})$ einen Morphismus $\underline{t}_G \otimes \Omega^1_R \to H^1(G,\Omega^1_R \otimes {}_R\mathcal{O}_{\tilde{G}})$, welcher im generischen Punkt ein Isomorphismus wird. Man kann dann κ auffassen als Bilinearform

$$\kappa : \underline{t}^*_G \times \underline{t}^*_G \to \Omega^1_K \ .$$

Es ist bekannt, daß κ symmetrisch ist. Außerdem enthält $\underline{t}^*_{\tilde{G}} = \underline{t}^*_{\tilde{G}} \;\; \underline{t}^*_A$, den dualen Tangentialraum zu A . $\kappa/\underline{t}^*_A \times \underline{t}^*_A$ ist die Kodaira-Spencer Klasse zu A , und $\kappa/\underline{t}^*_A \times \underline{t}^*_{\tilde{G}}$ beschreibt zusätzlich die Deformation der Erweiterung $0 \to T \to \tilde{G} \to A \to 0$. Sie entspricht dem Problem, eine translationsinvariante Differentialform aus $\underline{t}^*_{\tilde{G}}$ zu einem T-invarianten Schnitt aus $\Gamma(G,\Omega^1_{\tilde{G}})$ zu liften.

Wir nehmen nun an, daß $(\tilde{G},\underline{M})$ und das verträgliche System von Isomorphismen schon über einem Unterring $R_0 \subseteq R$ definiert sind, und betrachten,statt der absoluten Differentiale, Differentiale relativ R_0 . $\kappa : \underline{t}^*_{\tilde{G}} \times \underline{t}^*_G \to \Omega_{K/R_0}$ verschwindet dann auf $\underline{t}_A \times \underline{t}^*_G$, und definiert eine Bilinearform $\underline{t}^*_T \times \underline{t}^*_T \to \Omega^1_{K/R_0}$. Es ist $\underline{t}^*_T \cong X \otimes R$, wobei $\mu \in X$ dem Differential $d\log(\mu) = d\mu/\mu$ auf T entspricht. κ wird also zu einer symmetrischen Bilinearform auf $X \times X$.

<u>Lemma</u>:

$\kappa(\mu,\nu) = d\log(b(\mu,\nu))$

<u>Beweis</u>:

Zunächst kann man die durch $c_1(\underline{N})$ vermittelte Abbildung

$$\underline{t}_T \subseteq \underline{t}_G \to H^1(G,\mathcal{O}_G)$$

noch etwas anders beschreiben: Es ist die Tangentialabbildung zur durch $\underline{N}$ definierten Abbildung $G \to \mathrm{Pic}^0(G)$. Die entsprechende Abbildung $T \subseteq \tilde{G} \to \mathrm{Pic}(\tilde{P})$ ist trivial, da T auf $\underline{L} \otimes \underline{M}$ operiert, also $g^*(\underline{L} \otimes \underline{M}) \cong \underline{L} \otimes M$ für $g \in T$. Allerdings ist dieser Isomorphismus nicht invariant unter $Y = X$. Vielmehr führt ein $\mu \in X$ einen Faktor $\mu(g)$ ein. Man erhält dann leicht die folgende Beschreibung von

$$\underline{c}_1(\underline{N})\,|\underline{t}_T : \qquad \underline{t}_T = \mathrm{Hom}(X,R) \to H^1(G,\mathcal{O}_G) :$$

Sei $l : X \to R$ eine Linearform. Da $\hat{P} = \hat{\tilde{P}}/X$, definiert l eine Klasse in $H^1(\hat{\tilde{P}},\mathcal{O}_{\hat{\tilde{P}}}) = H^1(P,\mathcal{O}_P)$. Deren Einschränkung auf G ist das Bild von l . Andererseits sei $\mu \in X$.

Wähle $\lambda \in \underline{t}_G{}^* = \underline{t}_{\tilde{G}}{}^*$ mit $\lambda|T = d(\log(\mu))$. Da $\tilde{G}$ über R_0 definiert ist, liftet man λ kanonisch zu einer $\tilde{G}(R_0)$-invarianten Form in $\Gamma(\tilde{G},\Omega^1_{\tilde{G}/R_0})$, und wegen $\tilde{G}_\eta = \tilde{P}_\eta$ auch zu einer solchen Form in $\Gamma(\tilde{P}\cdot\Omega_{\tilde{P}/R_0}) \otimes_R K$.

Diese Form ist nicht notwendig invariant unter Translation mit $i(\nu)$, für $\nu \in X$. Vielmehr ändert sie sich um $d\log(b(\mu,\nu))$, da $i : X \to \tilde{G}(R)$ bis auf Faktoren aus $\tilde{G}(R_0)$ übereinstimmt mit der durch b definierten Abbildung $X \to T(K)$. Das Lemma folgt nun leicht.

§ 4 KONSTRUKTION VON A_G

a) Wir kommen nun zum Hauptziel unserer Bemühungen, nämlich der Konstruktion eines über $\mathbb{Z}$ eigentlichen algebraischen Feldes, welches A_g als offene Teilmenge enthält. Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist für uns ein algebraisches Feld eine Art Quotient $\underline{S}/\underline{R}$, wobei $\underline{S}$ ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ ist, und $\underline{R} \to \underline{S} \times_{\mathbb{Z}} \underline{S}$ eine endliche Abbildung, welche $\underline{R}$ zu einem Gruppoid macht über $\underline{S}$. Außerdem wird vorausgesetzt, daß die Projektionen von $\underline{R}$ auf $\underline{S}$ étale sind. Man überzeugt sich leicht von der Äquivalenz dieser Definition mit der in [DM] :

Wenn man jedem Schema T die "descente-Daten zu $\mathrm{Hom}(T,S/R)$ " zuordnet, bestehend aus étalen Überdeckungen $T' \to T$ und Abbildungen $T' \to S$, $T' \times_T T' \to R$, mit geeigneten Kompatibilitätsbedingungen, so erhält man ein Gruppoid über T und ein algebraisches Feld im Sinne von [DM] .

Zur Konstruktion von $\underline{S}$ benötigen wir einige zusätzliche Daten:

b) Sei $X = \mathbb{Z}^g$, $B(X)$ bezeichne die symmetrischen Bilinearformen auf X $(B(X) = \mathrm{Hom}(S^2(X),\mathbb{Z}))$, und $B^+(X)_{\mathbb{R}} \subseteq B(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ den Kegel der positiv semi-definiten Formen.

Wir fixieren eine Zerlegung

$$B^+(X)_{\mathbb{R}} = \cup\sigma$$

mit rationalen Kegeln $\sigma \subseteq B^+(X)_{\mathbb{R}}$. (Die σ sind die konvexe Hülle endlich vieler rationaler Halbgeraden in $B^+(X)_{\mathbb{R}}$) .

Diese erfülle

i) Jede Seite eines σ in der Zerlegung kommt ebenfalls vor.

ii) Die Inneren $\mathring{\sigma}$ (im Sinne konvexer Mengen, nicht der Topologie!) sind disjunkt.

iii) Unter $GL(g,\mathbb{Z})$ gibt es nur endlich viele Konjugationsklassen von σ's .

Die Zerlegung heißt glatt, wenn zusätzlich gilt:

iv) Jedes σ wird aufgespannt von einer Teilmenge einer Basis von $B(X)$.

Es ist bekannt, daß man durch weiteres Unterteilen aus jeder Zerlegung eine glatte machen kann. In unserem Fall werden glatte Zerlegungen zu glatten Kompaktifizierungen führen.

Weiter setzen wir voraus:

v) Für jedes σ existiert eine lineare Abbildung $l_\sigma : X \to S^2(X)$ so daß für alle $\mu \in X$ $r_\sigma(\mu) = \mu \otimes \mu + l_\sigma(\mu) \in 2 \cdot S^2(X)$, und so daß für fast alle μ $r_\sigma(\mu) \in \sigma^\vee$.

Bedingung v) ist automatisch, wenn die Zerlegung glatt ist (also iv) $\Rightarrow$ v)) , und kann sonst durch Unterteilen realisiert werden. Sie wird später die Existenz einer quadratischen Funktion a_σ sicherstellen, welche die Bilinearform b_σ (weiter unten) liefert:

$$a_\sigma(\mu) = \frac{1}{2}(\mu \otimes \mu + l_\sigma(\mu)) \in \mathbb{Z}\,[S^2(X)] \ .$$

Weiter gilt für jedes Quotientengitter $X \twoheadrightarrow X_1$, daß man durch Schneiden mit $B(X_1) \subseteq B(X)$ eine Kegelzerlegung von $B^+(X_1)_{\mathbb{R}}$ erhält.

Sei S der Torus mit Charaktergruppe $S^2(X) = B(X)^*$. Dann definiert jedes σ eine Torus-Einbettung $S \subseteq S_\sigma$, wobei S_σ affin ist mit Algebra $\mathbb{Z}[B(X)^* \cap \sigma^\vee]$. S operiert auf S_σ , und besitzt einen einzigen abgeschlossenen Orbit. Dessen Stabilisator ist der Untertorus von S , welcher zu $<\sigma> \subseteq B(X)$ gehört. Dabei sei $<\sigma>$ das von σ aufgespannte Untergitter. Wenn τ eine Seite von σ ist, so ist S_τ eine offene Teilmenge von S_σ .

Unsere Kompaktifizierung wird die Eigenschaft haben, daß sie lokal in der êtalen Topologie isomorph ist zu einem S_σ .

Für jedes σ bezeichne $X \twoheadrightarrow X_\sigma$ den maximalen Quotienten mit $\sigma \subseteq B^+(X_\sigma)_{\mathbb{R}}$. Dann ist $<\sigma> \subseteq B(X_\sigma) \subseteq B(X)$. $S(\sigma)$ bezeichne den Torus mit Charaktergruppe $B(X_\sigma)^*$, und $S(\sigma) \subseteq S(\sigma)_\sigma$ die Torus-Einbettung zu $\sigma \subseteq B(X_\sigma)_{\mathbb{R}}$. Die universelle symmetrische Bilinearform

$$X_\sigma \times X_\sigma \to B(X_\sigma)^* = S^2(X_\sigma)$$

definiert eine symmetrische Bilinearform

$$b_\sigma : X_\sigma \times X_\sigma \to K_\sigma^*$$

(K_σ = Quotientenkörper von R_σ , R_σ = affiner Ring zu

$$S(\sigma)_\sigma = \mathbb{Z}[B(X_\sigma)^* \cap \sigma^{\vee}]) \quad ,$$

so daß $b_\sigma(\mu,\mu) \in R_\sigma$ für $\mu \in X_\sigma$, und für $\mu \neq 0$ $b_\sigma(\mu,\mu)$ auf dem abgeschlossenen $S(\sigma)$-Orbit von $S(\sigma)_\sigma$ verschwindet.

Sei r_σ der Rang von X_σ .

c) Wähle einen abgeschlossenen Punkt $s \in S(\sigma)_\sigma$, welcher im abgeschlossenen Orbit von $S(\sigma)$ liegt, und eine prinzipal polarisierte abelsche Varietät der Dimension $g-r_\sigma$ über dem algebraischen Abschluß von $k(s)$. Diese besitzt eine verselle Deformation, definiert über der strikten Henselisierung eines Polynomrings über $\mathbb{Z}$. Die Erweiterungen dieser versellen Deformation durch $T_\sigma = \mathbb{G}_m^{r_\sigma}$ werden parametrisiert durch das r_σ -fache Produkt des Duals der universellen abelschen Varietät. Sei R_0 die strikte Henselisierung in einem abgeschlossenen Punkt dieses Produkts, und R die strikte Henselisierung von $R_0 \otimes_{\mathbb{Z}} R_\sigma$ im Punkte s .

Dann ist $R_0 \subseteq R$, über R_0 existiert eine semiabelsche Varietät $\widetilde{G}$, $0 \to T_\sigma \to \widetilde{G} \to A \to 0$, so daß die Kodaira-Spencer Abbildung einen

Isomorphismus definiert $\underline{t}_{\tilde{G}} \times \underline{t}_A \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{R_0/\mathbb{Z}}$. Wenn K_σ den Quotientenkörper von R bezeichnet, so existiert weiter die Bilinearform

$$b_\sigma : X_\sigma \times X_\sigma \to K_\sigma^* \quad ,$$

$b_\mu(\mu,\mu) \in \underline{m}$ = maximales Ideal, falls $\mu \neq 0$. Sei $\underline{M}$ ein amples Geradenbündel auf A , welches dort die prinzipale Polarisation definiert, und wähle ein zulässiges System von Isomorphismen für $\tilde{G}$, definiert über R_0 .

Satz 3 liefert dann über $\hat{R}$ (=$\underline{m}$-adische Komplettierung von R) eine abelsche Varietät G mit einem Geradenbündel $\underline{N}$, so daß $(\hat{G},\hat{\underline{N}}) \cong (\hat{\tilde{G}},\hat{\underline{M}})$, und daß die zugehörige Bilinearform (nach Satz 1) gleich b_σ ist. Nach dem Approximationssatz von M. Artin (siehe z. B. [A]) kann man annehmen, daß G und $\underline{N}$ schon über R definiert sind.

d) Aus der Toruseinbettung $S(\sigma) \subseteq S(\sigma)_\sigma$ erhält man eine Stratifikation $\mathrm{Spek}(R) = U = \bigcup_{\tau \subseteq \sigma} U_\tau$, wobei τ über die Seiten von σ läuft. Für jedes $\tau \subseteq \sigma$ ist X_τ ein Quotient von X_σ , und $S(\tau)$ ein Untertorus von $S(\sigma)$. Wähle ein Komplement S'_τ , so daß $S(\sigma) = S(\tau) \times S'_\tau$. Dann ist $S(\tau)_\tau \times S'_\tau$ eine offene Teilmenge von $S(\sigma)$, somit R_σ ein Unterring von $R_\tau \otimes \mathbb{Z}[S']$. Weiter erhält man eine Zerlegung $b_\sigma = b_\tau \otimes b'$, wobei $b' : X_\sigma \times X_\sigma \to \mathbb{Z}[S']$ als Werte nur Einheiten annimmt.

Sei $s_1 \in U_\tau$ ein Punkt. Die Faser von $\tilde{G}$ in $s_1, \tilde{G}_{s_1}$, ist Erweiterung einer abelschen Varietät A_1 durch einen Torus T_1 . Der Torus T_1 ist in natürlicher Weise ein Untertorus von T_σ , zerfällt also, und die Charaktergruppe X_1 von T_1 ist ein Quotient von X_σ . Es liegt nahe zu vermuten, daß $X_1 = X_\tau$ (also $T_1 = T_\tau$) . Wir werden gleich sehen, daß dies in der Tat der Fall ist. Auf jeden Fall schließt man schon aus unserer Variante von [M4], 4.11 (siehe § 3), daß X_1 den gleichen Rang hat wie X_τ .

Es reicht dann, die vermutete Gleichheit $X_1 = X_\tau$ für den Fall zu zeigen, daß s_1 einer der generischen Punkte von U_τ ist. Wegen U_τ normal kann man dann ähnlich wie in [F], § 2, Lemma 1, T_1 als Untertorus in $G|\overline{U}_\tau$ einbetten. Aufgrund der bekannten Starrheitseigenschaften von Tori kann man diese Einbettung auf die formale Komplettierung von U längst $\overline{U}_\tau$ fortsetzen.

Sei $I \subset R$ das Ideal, welches den Abschluß von $\overline{U}_\tau$ definiert. Dann kann man formal längs I und längs $\underline{m}$ komplettieren. Wir unterscheiden dies durch Indizes: ^{1} und ^{2}. Dann gibt es exakte Sequenzen

$$0 \to \hat{T}_1^1 \to \hat{G}^1 \to \hat{G}_1^1 \to 0 \ ,$$

$$0 \to \hat{T}^2 \to \hat{G}^2 \to \hat{A}^2 \to 0 \ ,$$

und

$$0 \to (\hat{T}^2/\hat{T}_1{}^2) \to \hat{G}_1{}^2 \to \hat{A} \to 0 \ .$$

Die formale Komplettierung von $\underline{N}$ ist jeweils Pullback eines Geradenbündels auf den letzten Termen dieser Sequenzen.

Sei $\theta \in \Gamma(G,\underline{N})$, $\theta \neq 0$. Dann können wir θ formal entwickeln:

i) Auf $\hat{G}^1$:

$$\hat{\theta}^1 = \sum_{\mu \in X_1} \theta_1(\mu)$$

Dabei sind die $\theta_1(\mu)$ μ-Eigenfunktionen unter $\hat{T}_1$, und konvergieren gegen Null in der I-adischen Topologie

ii) Auf $\hat{G}_2$:

$$\hat{\theta}^2 = \sum_{\mu \in X_\sigma} a(\mu)\ \underline{c}(\mu)^*(\theta_{\underline{M}}) \ ,$$

wobei $a(\mu+\nu)\ a(0) = a(\mu)\ a(\nu)\ b(\mu,\nu)$.

Durch Vergleich folgt:

$$\hat{\theta}_1{}^2(\nu) = \sum_{\mu \mapsto \nu} a(\mu)\ \underline{c}(\mu)^*(\theta_{\underline{M}})$$

für $\nu \in X_1$ (man summiert über das Urbild von ν) .

Angenommen nun, es sei $X_1 \neq X_\tau$. Dann gibt es $\mu \in X_\sigma$, welches Bild $\neq 0$ in X_1 , aber Bild 0 in X_τ hat. Damit konvergiert einerseits $a(n\mu)a(-n\mu) = a(0)^2 \cdot b(\mu,\mu)^{n^2}$ I-adisch gegen Null, so daß $b(\mu,\mu) \in I$.

Andererseits ist $b(\mu,\mu) = b'(\mu,\mu) =$ Einheit mod I. Also ist tatsächlich $X_1 = X_\tau$.

Da $b_\sigma = b_\tau \cdot b'$, kann man $a(\ )$ analog zerlegen:

$$a(\mu) = a_1(\mu)\ a'(\mu) \quad ,$$

wobei:

i) $a_1(\mu)$ hängt nur vom Bild von μ in $X_1 = X_\tau$ ab, und

$a_1(\mu+\nu)\ a_1(0) = a_1(\mu)a_1(\nu)b_\tau(\mu,\nu)$.

ii) $a'(0) = 1$, $a'(\mu+\nu) = a'(\mu)\ a'(\nu)\ b'(\mu,\nu)$.

Damit folgt:

$$\hat{\theta}_1^2(\nu) = a_1(\nu) \sum_{\mu\to\nu} a'(\mu)\ \underline{c}(\mu)^*(\theta_{\underline{M}}) \quad , \quad \nu \in X_\tau$$

Man überlegt sich übrigens leicht, daß man erreichen kann, daß $a'(\mu) \in \hat{K}_\sigma$ regulär ist auf dem Pullback von $U_\tau \subseteq \mathrm{Spek}(R)$ in $\mathrm{Spek}(\hat{R})$. (Dies gilt schon, falls $\mu \in \mathrm{Kern}(X_\sigma \to X_\tau)$, und sonst modifiziere man a_1 und a' mit einer linearen Abbildung $X_\tau \to \hat{R}^*$.)

Wir wenden dies wie folgt an:

Sei wieder $s_1 \in U_\tau$. Durch das Degenerieren von $(G,\underline{N})$ in s_1 erhält man nach Satz 1 eine symmetrische Bilinearform b_1 auf $X_\tau \times X_\tau$, mit Werten im Quotientenkörper der Komplettierung des lokalen Ringes von U in s_1. Wir behaupten, daß b_1/b_τ als Werte Einheiten (in s_1) hat:

Dazu darf man zunächst R durch $\hat{R}$ ersetzen. Sei R_1 dann der lokale Ring zu s_1, mit Komplettierung $\hat{R}_1$. Die Reihe

$$\hat{\theta}^1 = \sum_{\mu\in X_\tau} \theta_1(\mu)$$

induziert dann die entsprechende Zerlegung über $\hat{R}_1$. Da

$$\hat{\theta}_1^2(\nu) = a_1(\nu) \sum_{\mu\to\nu} a'(\mu)\ \underline{c}(\mu)^*(\theta_{\underline{M}}) \quad ,$$

und $a'(\mu)$ = Einheit in $\hat{R}_1$, folgt daß $\theta_1(\nu) = a_1(\nu)$ (regulärer Schnitt, $\neq 0$ in s_1) . Es folgt, daß b_1 und die Bilinearform zu a_1 (dies ist b_τ) sich nur um Einheiten unterscheiden.

Schließlich liefert G_1 auf der formalen Komplettierung von U längs $\overline{U}_\tau$ eine Kodaira-Spencer Abbildung

$$\underline{t}^*{}_G \times \underline{t}^*{}_{G_1} \to \Omega^1_{R/R_\tau} \otimes_R \hat{R}_1$$

Diese induziert einen Isomorphismus.
Bild von $(\underline{t}^*{}_G \otimes \hat{\underline{t}}^*{}_{G_1})$ in $S^2(\underline{t}^*{}_G) \otimes_R \hat{R}_1$ $\xrightarrow{\sim} \Omega^1_{R/R_\tau} \otimes_R \hat{R}_1$.

Beweis:

Sie induziert einen Isomorphismus

$$\text{Bild}(\underline{t}^*{}_G \otimes \hat{\underline{t}}^*{}_A) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{R/R_\sigma} \otimes_R \hat{R}_1 \;.$$

Die induzierte Abbildung

$$S^2(\underline{t}^*{}_{(T/T_1)}) \to \Omega^1_{R/R_\sigma} \otimes_R \hat{R}_1$$

ist gegeben durch

$$\mu \otimes \nu \longmapsto d(\log(b_\sigma(\mu,\nu)) = d\log(b'(\mu,\nu)) \,,$$

für $\mu, \nu \in X(T/T_1) = \text{Kern}(X_\sigma \to X_\tau)$.

Die $d\log(b'(\mu,\nu))$ bilden aber eine Basis von $\Omega^1_{\mathbb{Z}[s']/\mathbb{Z}}$ oder auch $\Omega^1_{R_\sigma/R_\tau} \otimes_R \hat{R}_1$, und es folgt alles.

e) Bis jetzt war R einfach die strikte Henselisierung von $R_0 \otimes_{\mathbb{Z}} R_\sigma$. Es ist dann induktiver Limes von endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Algebren, und es ist "alles" schon über einer solchen definiert. Wir erhalten dann ein Paar von endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Algebren, welches wir wieder $R_0 \subseteq R$ nennen, so daß R étale ist über $R_0 \otimes R_\sigma$, so daß $(\tilde{G}, \underline{M})$ definiert sind über

R_0 , und so daß $(G,\underline{\overline{N}})$ über R existieren. Außerdem erhält man durch strikte Lokalisierung von R in einem abgeschlossenen Punkt $s \in U_\sigma \subseteq U = \mathrm{Spek}(R)$ die bisherige Situation.

e) Lemma:

Indem man U gegebenenfalls durch eine kleinere étale Umgebung von s ersetzt, kann man folgendes erreichen:

i) Sei $\mathrm{Spek}(R) = U = \bigcup_{\tau\subseteq\sigma} U_\tau$ die Stratifikation, und $\hat{U}^\tau$ die formale Komplettierung von U längs $\overline{U}_\tau$. Dann existiert auf $\overline{U}^\tau$ eine exakte Sequenz

$$0 \to \hat{T}^\tau_\tau \to \hat{G}^\tau \to \hat{G}^\tau_\tau \to 0 \;, \qquad \hat{G}^\tau_\tau \text{ abelsch,}$$

und $\underline{\hat{N}}^\tau$ ist Pullback eines Geradenbündels $\underline{\hat{N}}^\tau_\tau$ auf $\hat{G}^\tau_\tau$

ii) Sei $\theta \in \Gamma(G,\underline{N}), \theta \neq 0$. Auf $\hat{U}^\tau$ entwickelt man θ nach $\hat{T}^\tau_\tau$-Eigenfunktionen:

$$\hat{\theta}^\tau = \sum_{\nu\in X_\tau} \hat{\theta}^\tau_\tau(\nu) \;.$$

Weiter zerlege man $b_\sigma = b_\tau \cdot b'$. Dann existiert ein

$$a_o \in \hat{R}^\tau = \Gamma(\hat{U}^\tau, \mathcal{O}_{\hat{U}^\tau}) \;, \; a_o \neq 0 \;,$$

so daß $\hat{\theta}^\tau_\tau(\nu)\hat{\theta}^\tau_\tau(-\nu) = b_\tau(\nu,\nu)\cdot a_o \cdot f_\nu$, wobei der Schnitt $f_\nu \in \Gamma(\hat{G}^\tau_\tau, \underline{\hat{N}}^{\tau 2}_\tau)$ auf U_τ in keinem Punkt identisch auf der Faser verschwindet.

iii) Die Kodaira-Spencer Klasse von $\hat{G}^\tau_\tau$ induziert auf $\hat{U}_\tau$ einen Isomorphismus

$$\text{Bild von } \underline{t}^*_G \otimes \underline{t}^*_{G_\tau} \text{ in } S^2(\underline{t}^*_G) \otimes \mathcal{O}_{\hat{U}_\tau} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{R/R_\tau} \otimes \mathcal{O}_{\hat{U}_\tau}$$

Beweis:

Punkt i) ist klar. Für ii) wählt man a_0 so, daß die Bedingung für $\nu = 0$ erfüllt ist. Dann gilt sie auch in allen Punkten $s_1 \in U_\tau$, welche s in ihrem Abschluß enthalten (nach den vorherigen Überlegungen über Bilinearformen). Außerdem reicht es, sie für eine gewisse endliche Anzahl von ν's zu verifizieren. (Wegen des Zusammenhangs mit Bilinearformen).

Damit läßt sich auch ii) erledigen. iii) geht genauso.

Korollar:

Sei $s_1 \in U$ ein abgeschlossener Punkt, $s_1 \in U_\tau$. Dann ist die Komplettierung der strikten Henselisierung von U in s isomorph zur Komplettierung eines der vorher konstruierten Ringe R (für τ statt σ), wobei sich die G's und $\underline{N}$'s entsprechen.

Beweis:

Sei R_1 der lokale Ring in $s_1, \hat{R}_1$ seine Komplettierung. Betrachte die Zerlegung in $\hat{G}$ in s_1:

$$0 \to \hat{T}_1 \to \hat{G} \to \hat{A} \to 0 \ , \ \hat{T}_1 = \hat{T}_\tau \ .$$

Wenn R_2 eine verselle Deformation ist von $\hat{A}$ (mit Polarisation) und der Erweiterung durch T_1, so ist die Abbildung $R_2 \hat{\otimes} R_\tau \to \hat{R}_1$ étale, nach Teil iii) des Lemmas. Weiter gilt für die zur Degeneration gehörige Bilinearform $b_1 : X_\tau \times X_\tau \to \hat{K}_1^*$, daß b_1/b_τ Werte in den Einheiten $\hat{R}_1^*$ annimmt. Wenn man die Abbildung $R_\tau \to \hat{R}_1$ mit einem geeigneten Element aus $S(\tau)(\hat{R}_1)$ twistet, darf man annehmen, daß $b_1 = b_\tau$, und alles hat seine Ordnung.

f) Jetzt können wir den Hauptsatz zeigen:

Satz 4:

Es existiert ein Schema $\underline{S}$, von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$, glatt und mit geometrisch normalen Fasern, und ein Gruppoid $\underline{R} \to \underline{S} \times_{\mathbb{Z}} \underline{S}$, endlich, mit étalen Projektionen auf $\underline{S}$, so daß gilt:

i) Über $\underline{S}$ existiert eine semiabelsche Varietät G, abelsch in den generischen Punkten, und ein Geradenbündel $\underline{N}$, welches in den generischen Punkten eine prinzipale Polarisation definiert.

ii) Seien G_1 und G_2 die beiden semiabelschen Varietäten der Dimension g, die man durch Pullback mit den Projektionen auf $\underline{R}$

erhält. Dann gibt es einen Isomorphismus $G_1 \cong G_2$, welcher in den generischen Punkten die Polarisation respektiert und mit der Gruppoid-Struktur verträglich ist.

iii) Sei $\underline{S}^0 \subseteq \underline{S}$ die dichte offene Teilmenge, über der G abelsch ist, $\underline{R}^0 = pr_1^{-1}(\underline{S}^0) = pr_2^{-1}(\underline{S}^0)$. Dann ist $R^0 \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Isom}}(G_1, G_2\ ;\ \text{Polarisation})$. Das durch $(\underline{S}^0, \underline{R}^0)$ definierte algebraische Feld ist A_g.

iv) Das durch $(\underline{S}, \underline{R})$ definierte algebraische Feld ist eigentlich über $\mathbb{Z}$.

v) $\underline{S}$ und $\underline{R}$ besitzen Stratifikationen $S = \cup\, \underline{S}_\sigma$, $R = \cup\, \underline{R}_\sigma$, parametrisiert durch die Konjugationsklassen der $\sigma \subseteq B^+(X)_{\mathbb{R}}$ unter $GL(g, \mathbb{Z})$. Für einen abgeschlossenen Punkt $s \in \underline{S}_\sigma$ ist die strikte Henselisierung von $\underline{S}$ in s isomorph zur strikten Henselisierung von s_σ in einem Punkt des abgeschlossenen S-Orbits. Dieser Isomorphismus erhält die Stratifikationen. $\underline{S}^0$ ist das Stratum zu $\sigma = (0)$.

<u>Beweis</u>:

Wir wählen $\underline{S}$ als endliche Vereinigung von den vorher konstruierten U's. Jedes solche U gehörte zu einem σ, und es gab eine étale Abbildung $U \to S(\sigma)_\sigma \times$ (Modulfeld der semiabelschen $0 \to G_m^r \to \tilde{G} \to A \to 0$). Wir fordern, daß für je ein σ in einer $GL(g, \mathbb{Z})$-Konjugationsklasse die zugehörigen U's die Menge (abgeschlossener $S(\sigma)$-Orbit) $\times$ (Modulfeld) überdecken. Da das Modulfeld quasikompakt ist, und da es nur endlich viele Konjugationsklassen von σ's gibt, reichen dazu endlich viele U's. Wir haben nun $\underline{S}$, und erhalten zwei semiabelsche Varietäten G_1 und G_2 durch Pullback auf $\underline{S} \times_{\mathbb{Z}} \underline{S}$. Über $\underline{S}^0 \times \underline{S}^0$ ist $\underline{R}^0 = \underline{\mathrm{Isom}}_{\underline{S}_o}(G_1, G_2;\ \text{Polarisation})$ endlich. Sei $\underline{R}$ die Normalisierung von $\underline{R}^0$ über $\underline{S} \times_{\mathbb{Z}} \underline{S}$. Dann ist $\underline{R}$ normal und endlich über $\underline{S} \times_{\mathbb{Z}} \underline{S}$. Außerdem existiert über $\underline{R}$ ein Isomorphismus $G_1 \cong G_2$ (siehe [F], § 2, Lemma 1), und die Aussagen i), ii), iii) und v) folgen, wenn wir zeigen, daß die Projektionen von $\underline{R}$ auf $\underline{S}$ étale sind und die Stratifikationen respektieren. Dazu sei $s \in \underline{R}$ ein abgeschlossener Punkt, mit Projektionen s_1 und s_2 auf S. Sei R die Komplettierung der strikten Henselisierung von $\underline{R}$ in s, und entsprechend für $R_1 \hat{\otimes} R_2$. Dann ist

R endlich über $R_1 \hat{\otimes} R_2$ (das komplette Tensorprodukt ist zu nehmen über der Komplettierung der strikten Henselierung von $\mathbb{Z}$ in einem Primideal $p\mathbb{Z}$, $p \neq 0$), normal, enthält R_1 und R_2 , und es ist $G_1 \otimes_{R_1} R = G_2 \otimes_{R_2} R = G_{12}$. Zu den degenerierenden polarisierten abelschen Varietäten gehören Gitter $X_1 = X_2 = X_{12}$ und symmetrische Bilinearformen.

$b_1 : X_1 \times X_1 \to K_1^*$

$b_2 : X_2 \times X_2 \to K_2^*$

$b_{12}: X_{12} \times X_{12} \to K^*$

(K_1, K_2, K sind die Quotientenkörper). Es ist $b_{12} = b_1 \cdot b_1' = b_2 \cdot b_2'$ wobei $b_1', b_2' : X_{12} \times X_{12} \to R^*$ als Werte Einheiten annehmen.

Weiter hat man Polyeder $\sigma_1 \subseteq B^+(X_1)_{\mathbb{R}}$ und $\sigma_2 \subseteq B^+(X_2)_{\mathbb{R}}$. Es ist $\sigma_1 = \sigma_2$:

Angenommen $\sigma_{12} = \sigma_1 \cap \sigma_2$ ist eine echte Seite von σ_1 (oder analog von σ_2). Dann gibt es endlich viele Elemente $\mu_j, \nu_j \in X_1$, so daß für jede Bilinearform $b \in \sigma_{12}$ $\Sigma\, b(\mu_j, \nu_j) = 0$, aber daß diese Summe positiv wird für jedes b in $\sigma_1 - \sigma_{12}$, und negativ für $b \in \sigma_2 - \sigma_{12}$. Es sind dann $\Pi b_1(\mu_j, \nu_j)$ und $\Pi b_2^{-1}(\mu_j, \nu_j)$ Elemente aus R_1 bzw. R_2 , wobei das erste Produkt keine Einheit ist. Ihr Produkt ist aber eine Einheit in R , und das geht nicht.

Sei also $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, und damit $X_1 = X_2 = X_{12} = X_\sigma$.

Es sei wieder R_0 die Basis einer versellen Deformation von G_s über $\overline{k(s)}$ (d.h., Deformation des abelschen Teils und der Erweiterung durch den Torus). Dann sind R_1 und R_2 Komplettierungen von strikten Henselisierungen von $R_0 \otimes R_\sigma$, und $\tilde{G}_1$ und $\tilde{G}_2$ sind Pullback eines $\tilde{G}$ über R_0 . Man wähle ein zulässiges System von Isomorphismen für $\tilde{G}$ über R_0 , und erhält dann einen Isomorphismus $R_1 \cong R_2$, bei dem sich b_1 und b_2 entsprechen. Nach Satz 2 ist dann auch $G_1 \cong G_2$, und der Isomorphismus über R entsteht einfach durch Basiserweiterung. Da R über die Normalisierung von $\underline{\mathrm{Isom}}_{S_0}$ (G_1, G_2; Polarisation) definiert wurde, ist $R = R_1 = R_2$. Die Projektionen sind also étale in $s \in \underline{R}$. Es bleibt die Aussage iv) . Dazu benutzt man ein Bewertungs-Kriterium: Sie V ein kompletter diskreter Bewertungsring, mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k und Quotientenkörper K , und

$$\phi_1 : \mathrm{Spek}(K) \to \underline{S}$$

ein Morphismus der den einzigen Punkt von $\mathrm{Spek}(K)$ in einen der generischen Punkte von $\underline{S}$ abbildet. Dann gibt es eine endliche Erweiterung $K' \supseteq K$, mit Normalisierung V' von V, und

$$\phi_2 : \mathrm{Spek}(V') \to \underline{S} \quad ,$$

so daß man $\phi_1 \times \phi_2 : \mathrm{Spek}(K') \to \underline{S} \times_{\mathbb{Z}} \underline{S}$ zu einem K'-wertigen Punkt von $\underline{R}$ liften kann.

Es ist also folgendes zu zeigen:

Das Pullback $\phi_1{}^*(G)$ von G unter ϕ_1 ist eine prinzipal polarisierte abelsche Varietät. Wir brauchen ϕ_2, so daß $\phi_2{}^*(G)|K'$ isomorph zu $\phi_1{}^*(G)$ ist.

Dazu wähle man K' so groß, daß $\phi_1{}^*(G)$ semistabile Reduktion hat über K', und ersetzt V durch V', K durch K'.

Sei $v : K^* \to \mathbb{Z}$ die Bewertung. Das Néron-Modell von $\phi_1{}^*(G)$ definiert nach Satz 1 eine symmetrische Bilinearform $b : X_V \times X_V \to K^x$ auf einem Gitter X_V, und $v \circ b$ ist positiv definit. Es gibt also ein σ in der Kegel-Zerlegung, so daß $v \circ b$ im Inneren von σ liegt, und $X_V \cong X_\sigma$. (σ, X_σ) ist eindeutig bestimmt bis auf Konjugation mit $GL(g,\mathbb{Z})$.

Sei wieder R_0 eine verselle Deformation der speziellen Faser des Néron-Modells. Wir erhalten eine Abbildung $R_0 \to V$, so daß die universelle Überlagerung des Néron-Modells über R_0 definiert ist. Wenn man dann über R_0 ein zulässiges System von Isomorphismen wählt, definiert b einen Morphismus $R_0 \otimes R_\sigma \to V$ bzw. $\mathrm{Spek}(V)$ $\mathrm{Spek}(R_0) \times_{\mathbb{Z}} S(\sigma)_\sigma$, wobei der abgeschlossene Punkt von $\mathrm{Spek}(V)$ in den abgeschlossenen Orbit von $S(\sigma)_\sigma$ abgebildet wird. Nach Konstruktion von S kann man diese Abbildung liften in eines der U's.

Dies liefert ϕ_2, so daß das Néron-Modell von $\phi_1{}^*(G)$ und $\phi_2{}^*(G)$ dieselbe formale Komplettierung in V haben und dieselbe symmetrische Bilinearform definieren. Nach Satz 2 sind sie isomorph.

g) Damit ist der Beweis von Satz 4 beendet. Wir notieren hier nur noch das Korollar, daß die geometrischen Fasern von A_g über $\mathbb{Z}$ irreduzibel sind: Dies folgt aus der analytischen Theorie in Charakteristik 0, und der Rest ist genauso wie in [DM].

§ 5 LEVEL-N-STRUKTUREN

a) Alle unsere Überlegungen lassen sich auch mit Level-Strukturen durchführen. Wir wählen eine natürliche Zahl n. Da sich bekanntlich Level-n-Strukturen schlecht mit Charakteristiken vertragen, welche n teilen, arbeiten wir über $\mathbb{Z}\left[{}^1/n, e^{2\pi i/n}\right]$. Über diesem Grundring hat man eine kanonische symplektische Form $\langle , \rangle$ auf $({}^{\mathbb{Z}}/n\mathbb{Z})^{2g}$, mit Werten in μ_n = n.te Einheitswurzeln. Eine Level-n-Struktur auf einer prinzipal polarisierten abelschen Varietät der Dimension g ist ein Isomorphismus $A^{(n)} \xrightarrow{\sim} ({}^{\mathbb{Z}}/n\mathbb{Z})^{2g}$ ($A^{(n)}$ = n-Teilungspunkte), welcher die symplektische Struktur erhält. Die verschiedenen Level-n-Strukturen auf A sind konjugiert unter $Sp(2g, {}^{\mathbb{Z}}/n\mathbb{Z})$. Es gibt ein algebraisches Feld $A_{g,n}$ über $Z\left[{}^1/n, e^{2\pi i/n}\right]$, welches die abelschen Varietäten mit Level-n-Struktur klassifiziert. Für $n \geq 3$ ist $A_{g,n}$ sogar ein algebraischer Raum.

Sei $\bar{A}_{g,n}$ die Normalisierung von $\bar{A}_g$ in $A_{g,n}$. $A_{g,n}$ wird gegeben durch ein Paar $(\underline{S}_n, \underline{R}_n)$. Dabei ist $\underline{S}_n$ die Normalisierung von $\underline{S}_n$ in der durch Hinzufügen von Level-n-Strukturen über $\underline{S}^0$ definierten Überlagerung, und $\underline{R}_n$ wieder die Normalisierung von $\underline{R}_n^0$.

b) Wir wollen ein lokales Modell finden für die Überlagerung $\underline{S}_n \to \underline{S}$. Dazu betrachtet man wieder den Torus S mit Charaktergruppe $B(X)^*$, und die Torus-Einbettungen $S \subseteq S_\sigma$. Die Multiplikation mit n auf S induziert eine verzweigte Überlagerung $n : S_\sigma \longrightarrow S_\sigma$.

Es gilt nun:

Satz 5:

i) Die Überlagerung $\underline{S}_n \to \underline{S}$ ist lokal in der étalen Topologie isomorph zu $n : S_\sigma \longrightarrow S_\sigma$. Insbesondere erhält auch $\underline{S}_n$ eine Stratifizierung, hat geometrisch normale Fasern, und ähnliches.

ii) Für $n \geq 3$ ist $\underline{R}_n \to \underline{S}_n \times_{\mathbb{Z}\left[{}^1/n, e^{2\pi i/n}\right]} \underline{S}_n$ eine abgeschlossene Einbettung, und $\bar{A}_{g,n}$ ein algebraischer Raum.

Beweis:

i) Sei R die Komplettierung der strikten Henselisierung von $\underline{S}$ in einem abgeschlossenen Punkt, G/R die universelle semiabelsche Varietät, $\tilde{G}$, $0 \to T_\sigma \to \tilde{G} \to A \to 0$, X_σ und $b_\sigma : X_\sigma \times X_\sigma \to K^*$ wie üblich. Die Behauptung i) läuft darauf hinaus zu zeigen, daß die n-Teilungspunkte von G_η den Körper $K(\sqrt[n]{b})$ erzeugen. Aus unserem Analogon zu [M4], 4.11(siehe § 3) ergibt sich eine exakte Sequenz von Gruppenschemata über K

$$0 \to \tilde{G}^{(n)} \to G^{(n)} \to X_\sigma / n \cdot X_\sigma \to 0 \quad .$$

Dabei ist $\tilde{G}^{(n)}$ étale vom Rang n^{2g-r_σ} , und die Faser über der Klasse modulo $n \cdot X_\sigma$ von $\mu \in X_\sigma$ ist isomorph zu $Z_\mu^{(n)}(\overline{K}) = \{g \in \tilde{G}(\overline{K}),\ n \cdot g = i(\mu)\}$. Wenn $b_\sigma : X \to T_\sigma(K)$ die zu $b_\sigma(,)$ gehörige Injektion ist, so ist $i(\mu) \in \tilde{G}(R) \cdot b_\sigma(\mu)$. Da $\tilde{G}(R)$ n-divisibel ist, ist der von den Koordinaten der n-Teilungspunkte erzeugte Körper gleich $K(\sqrt[n]{b_\sigma(X)})$, und es folgt die Behauptung.

ii) Wie bisher sind die Projektionen von $\underline{R}_n$ auf $\underline{S}_n$ étale, und somit ist $\underline{R}_n \to \underline{S}_n \times_{\mathbb{Z}[1/n, e^{2\pi i/n}]} \underline{S}_n$ unverzweigt.

Es reicht dann zu zeigen, daß über zwei geometrischen Punkten s_1 und s_2 von $\underline{S}_n$ höchstens ein geometrischer Punkt von $\underline{R}_n$ liegen kann. Es mögen wieder R_1, R_2 und R die Komplettierungen der strikten Henselisierungen von $\underline{S}_n$ bzw. $\underline{R}_n$ in s_1, s_2 und s bezeichnen. Es ist $R_1 \cong R$ und $R_2 \cong R$, und der induzierte Isomorphismus $R_1 \cong R_2$ ist unabhängig von der Wahl von s (und R), da schon bekannt ist, daß $\underline{R}_n^0$ sich abgeschlossen einbettet in $\underline{S}_n^0 \times_{\mathrm{Spek}(\mathbb{Z}[1/n, e^{2\pi i/n}])} \underline{S}_n^0$.
Es folgt, daß es nur ein s in der Faser über (s_1, s_2) geben kann.

Korollar:

Die geometrischen Fasern von $A_{g,n}$ über $\mathbb{Z}[1/n, e^{2\pi i/n}]$ sind irreduzibel.

§ 6 MODULFORMEN UND MINIMALE KOMPAKTIFIZIERUNG

a) Auf $\overline{A}_g$ erhält man in natürlicher Weise eine Reihe von Vektorbündeln. Dabei ist ein Vektorbündel auf $\overline{A}_g$ gegeben durch ein Vektorbündel auf $\underline{S}$, dessen beide Pullbacks zu $\underline{R}$ isomorph sind (unter Erfüllung geeigneter Bedingungen).

1.) $\underline{t}_G$, $\underline{t}^*_G$, d.h. Tangential und Kotangentialbündel des universellen G's, und ihre Tensorpotenzen u.s.w. Sei $\omega_G = \Lambda^g \underline{t}^*_G$.

2.) Im allgemeinen ist $\Omega^1_{\underline{S}/\mathbb{Z}}$ nicht lokal frei. Als Ersatz dient besser das Bündel Θ, definiert wie folgt: Für jede Torus-Einbettung $S \subseteq S_\sigma$ sei Θ_{S_σ} das Unterbündel des direkten Bildes von $\Omega^1_{S/\mathbb{Z}}$, welches von den $d\mu/\mu$ erzeugt wird (μ = Charakter von S). Da $\underline{S}$ lokal in der étalen Topologie isomorph ist zu einem S_σ, erhält man Θ auf $\underline{S}$. Wenn die Kegelzerlegung glatt ist, so ist Θ die Garbe der Differentialformen mit logarithmischen Polen in ∞. Die Kodaira-Spencer Klasse liefert einen Isomorphismus $\kappa: S^2(\underline{t}^*_G) \xrightarrow{\sim} \Theta$. (Dies folgt aus der ziemlich expliziten Bestimmung von κ).

3.) Lokal existiert ein Geradenbündel $\underline{N}$ auf G, welches über $\underline{S}^0$ die prinzipale Polarisation definiert. Wenn $e: S \longrightarrow G$ den Nullschnitt bezeichnet, kann man annehmen, daß $e^*(\underline{N}) \cong \mathcal{O}_S$ trivial ist.

$\underline{N} \otimes [-1]^*\underline{N} = \underline{H}$ ist dann ein wohldefiniertes Geradenbündel auf G, mit $e^*(\underline{H}) \cong \mathcal{O}_{\underline{S}}$. Das direkte Bild $p_*(\underline{H})$ auf $\underline{S}$ ($p: G \to \underline{S}$ die Projektion) ist eine kohärente reflexive Garbe vom Rang 2^g. Ihre lokale Struktur ist recht interessant, siehe z. B [MB]. Man kann übrigens ihre lokale Struktur mit Hilfe unserer Überlegungen beim Beweis von Satz 2 aufhellen.

Auf jeden Fall ist $p_*(\underline{H})$ lokal frei auf $\underline{S}^0$. Wenn wir Level-2-Strukturen einführen, also zu $\underline{S}^0_2$ übergehen, so ergibt sich eine irreduzible Darstellung der Θ-Gruppe auf $p_*(\underline{H})$, und $p_*(\underline{H}) \cong \underline{K}^{2^g}$, für ein Geradenbündel $\underline{K}$ auf $\underline{S}^0_2$ oder auf $A_{g,2}$. Aus dem Satz von Riemann-Roch folgt, daß in $\mathrm{Pic}(A_{g,2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \underline{K}$ und ω^{-1} dasselbe Bild haben. Eine Potenz von $\underline{K}$ stimmt somit mit einer Potenz von ω^{-1} überein.

b) Eine Modulform vom Gewicht k zur Gruppe $S_p(2g,\mathbb{Z})$ ist ein globaler Schnitt von ω^k über $\overline{A}_g$. Man definiert entsprechend Modulformen über $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ oder allgemeiner über einem beliebigen Ring. Man kann auch Schnitte von ω^k über A_g betrachten. Diese lassen sich wie folgt interpretieren:

Jeder abelschen Varietät A von der Dimension g wird ein $f_A \in \Gamma(A,(\Omega_A^g)^k)$ zugeordnet. Die verschiedenen f_A's entsprechen sich bei Basiswechsel oder Automorphismen von A. Jeder Schnitt von ω^k über A_g besitzt dann Fourierentwicklungen:

Sei wieder $X = \mathbb{Z}^g$, $\sigma \subseteq B^+(X)_{\mathbb{R}}$ ein konvexer rationaler Polyeder stabil unter Homothetien. Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß σ in der vorher gewählten Kegelzerlegung auftaucht. Wir können jedoch wieder $X_\sigma, r_\sigma = \mathrm{Rang}(X_\sigma)$, $S, S(\sigma)$ und $S(\sigma)_\sigma$ definieren.

Sei A eine abelsche Varietät der Dimension $g-r_\sigma$. A sei prinzipal polarisiert, mit Dual $A^\vee$. Über $(A^\vee)^{r_\sigma}$ existiert dann die universelle Erweiterung von A durch $T_\sigma = \mathbb{G}_m^{r_\sigma}$:

$$0 \to T_\sigma \to \tilde{G} \to A \to 0 \quad .$$

Sei $\hat{R}_\sigma$ die Komplettierung des Ringes R_σ zu $S(\sigma)_\sigma$ in der I-adischen Topologie, wobei das Ideal I den abgeschlossenen $S(\sigma)$-Orbit in $S(\sigma)_\sigma$ beschreibt. Dann liefert die Mumford-Konstruktion eine semiabelsche Varietät G über $\mathrm{Spek}(R_\sigma) \times (A^\vee)^{r_\sigma}$, (zunächst über dem formalen Schema, aber man macht alles algebraisch, da die Konstruktion gleich eine Kompaktifizierung dieser Varietät liefert), welche gute Reduktion hat auf dem Urbild des offenen $S(\sigma)$-Orbits $S(\sigma) \subseteq S(\sigma)_\sigma$.

Wenn $\mu_1,\ldots,\mu_{r_\sigma}$ eine Basis von X_σ ist, so ist

$$\Lambda^g \underline{t}^*_G \cong \hat{R}_\sigma (d(\log(\mu_1)\wedge\ldots\wedge d\log(\mu_{r_\sigma})) \otimes \Lambda^{g-r_\sigma}(\underline{t}^*_A)$$

und f_G hat eine Entwicklung

$$f_G = \sum_{\chi\in B(X_\sigma)^*} \chi \cdot f_\chi \cdot (d\log(\mu_1)\wedge\ldots\wedge d\log(\mu_{r_\sigma}))^k \quad ,$$

mit

$$f_\chi \in (\Lambda^{g-r_\sigma}(\underline{t}^*_A))^k$$

Die f_χ liefern globale Schnitte von ω^k über A_{g-r_σ} und es gibt ein χ_o, so daß f_χ verschwindet für $\chi \notin \chi_o + \sigma^\vee$.

Wenn $\sigma_1 \subseteq \sigma$ ein in σ enthaltener Polyeder ist, so stimmen die f_χ für σ_1 mit denen für σ überein. Schließlich sind sie noch invariant unter der Gruppe $GL(X_\sigma)$, genauer gesagt, für $a \in GL(X_\sigma)$ ist $f_{a(\chi)} = \det(a)^k \cdot f_\chi$ (beachte die Operation von a auf

$$d \log(\mu_1) \wedge \ldots \wedge d \log(\mu_{r_\sigma}) \;!) .$$

Wenn $r_\sigma > 1$, so folgt dann schon automatisch, daß $f_\chi \neq 0$ nur gelten kann, wenn $\chi \in B^+(X_\sigma)^\vee_{\mathbb{R}}$. (Koecher-Prinzip): χ definiert eine Linearform auf $B(X_\sigma)_{\mathbb{R}}$. Für jeden rationalen konvexen Polyeder $\sigma_1 \subseteq B^+(X_\sigma)_{\mathbb{R}}$ gibt es χ_1, so daß $a(\chi) \in \chi_1 + \sigma_1^\vee$ für alle $a \in GL(X_\sigma)$. Wenn $C \subseteq \sigma_1(\mathbb{R})$ eine kompakte Teilmenge ist, so ist dann die durch χ definierte Linearform nach unten beschränkt auf $\bigcup_{a \in GL(X_\sigma)} a(C)$.

Wenn $r_\sigma > 1$ ist, so kann man aber durch geeignete Wahl von C erreichen, daß die konvexe Hülle der obigen Menge gleich $B^+(X_\sigma)_{\mathbb{R}}$ ist. Also liegt χ in $B^+(X_\sigma)^\vee$.

Aus unserer Konstruktion von $\bar{A}_g$ folgt, daß f sich genau dann zu einem regulären Schnitt von ω^k auf $\bar{A}_g$ ausdehnt, wenn für alle σ in der gewählten Kegelzerlegung die Koeffizienten f_χ verschwinden, falls $\chi \notin \sigma^\vee$. Für jedes einzelne σ ist dies äquivalent zur Regularität von f auf dem Stratum $\underline{S}_\sigma$, und f ist schon auf ganz $\underline{S}_\sigma$ regulär, wenn dies in einem Punkt von $\underline{S}_\sigma$ gilt.

Daraus folgt, daß man nur die σ's mit $\dim(\sigma) = \frac{g(g+1)}{2}$ maximal betrachten muß. Dort erhält man eine Entwicklung

$$f = \sum_{\chi \in B(X)^*} \chi \cdot f_\chi \cdot (d \log(\mu_1) \wedge \ldots \wedge d \log(\mu_g))^k ,$$

mit $f_\chi \in \mathbb{Z}$.

f definiert eine Modulform $\Leftrightarrow f_\chi = 0$ für $\chi \notin B^+(X)^\vee$. (Dies ist automatisch, falls $g \geq 2$).

Man kann statt $\mathbb{Z}$ auch andere Grundringe wählen, wie $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ u.s.w. Beim Grundring $\mathbb{C}$ erhält man bis auf einen Faktor $(2\pi i)^{gk}$ die klassische Fourierentwicklung einer Modulform, indem man etwa $B^+(X)^\vee$ identifiziert mit den halbganzen symmetrischen positiv definierten Matrizen. Es folgt zum Beispiel, daß der Raum der Modulformen über $\mathbb{C}$ eine Basis besitzt, deren Elemente ganze Fourierkoeffizienten haben, und daß eine $\mathbb{C}$-Modulform genau dann über $\mathbb{Z}$ definiert ist, wenn alle Fourierkoeffizienten in $(2\pi i)^{gk}\cdot\mathbb{Z}$ liegen.

Wir notieren noch eine weitere Eigenschaft der Modulformen: Sei wieder

$$f = \sum_{\chi\in B^*(X_\sigma)^\vee} \chi\cdot f_\chi (d\log(\mu_1)\wedge\ldots\wedge d\log(\mu r))^k .$$

Sei $\langle\sigma\rangle \subseteq B(X_\sigma)$ das von σ aufgespannte Untergitter. Dann ist $B^+(X_\sigma)^\vee \cap \langle\sigma\rangle^\perp = \{0\}$, da σ eine positiv definite Form enthält. Es folgt, daß f konstant ist auf dem abgeschlossenen $S(\sigma)$ – Orbit in $S(\sigma)_\sigma$.

Der konstante Wert wird gegeben durch die Modulform f_0 , vom Gewicht k , auf $\overline{A}_{g-r_\sigma}$. Man überlegt sich leicht, daß die Fourierkoeffizienten der Entwicklung von f_0 parametrisiert werden durch $\chi\in B^+(\mathrm{Kern}(X\to X_\sigma))^\vee \subseteq B^+(X)^\vee$, und daß man für solche χ dieselben Koeffizienten für f und f_0 erhält. (Betrachte f auf Produkten $A_1\times A_2$ der Dimensionen $(r_\sigma, g-r_\sigma))$.

Entsprechendes gilt auch für Modulformen mit Level-Struktur (über $Z\left[{}^1/n,\ e^{2\pi i/n}\right]$ zum Beispiel): Dort wird die Fourier-Entwicklung parametrisiert durch $\chi\in\frac{1}{n}B\ (X_\sigma)^\vee$, und zu jedem σ gehören mehrere Fourier-Reihen.

c) Beispiele für Modulformen erhält man durch θ-Reihen : Wähle $\underline{a},\underline{b}\in(\frac{1}{n}\,\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^g$. Dann ist bis auf 4.-te Einheitswurzeln

$$\theta(Z;\underline{a},\underline{b}) = e^{i\pi\underline{a}^t\underline{b}} \sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^g} e^{i\pi((\underline{m}+\underline{a})Z^t(\underline{m}+\underline{a}))}\ e^{2i\pi\underline{m}^t\underline{b}}$$

eine Modulform vom Gewicht $^1/2$ zum Level $2n^2$, und ein Produkt $4k$ solcher θ's liefert eine Modulform vom Gewicht $2k$. Die Fourierkoeffizienten liegen in $\mathbb{Z}\left[e^{i\pi}/n^2\right]$, so daß die entsprechenden Modulformen über diesem Ring definiert sind. (Bis auf $2\pi i$'s). Die Fourierkoeffizienten von $\theta(Z;\underline{a},\underline{b})$ werden parametrisiert durch $\chi \in \frac{1}{2n^2} B(X)^* = \frac{1}{2n^2} S^2(X)$. Sie sind verschieden von Null nur für χ von der Form

$$\{\frac{1}{2}(\underline{m}+a) \otimes (\underline{m}+\underline{a}), \quad \underline{m} \in X = \mathbb{Z}^g\}.$$

Es folgt, daß für einen Kegel $\sigma \subseteq B^+(X)$ der konstante Term eines Produktes von θ's verschwindet, außer wenn alle vorkommenden $\underline{a}$'S im Kern von $^1/n \cdot X/X \to {}^1/n\ X_\sigma/X_\sigma$ liegen. In diesem Fall ist der konstante Term wieder ein Produkt solcher θ's , mit $g-r_\sigma$ statt g .

Die $\theta(Z;\underline{a},\underline{b})$ hängen mit den θ-Nullwerten zusammen: Wir arbeiten von nun an in Charakteristik $\neq 2$. Beim a) unter 3.) konstruierten Isomorphismus $p_*(\underline{H}) \cong \underline{K}^{2^g}$, mit $\underline{K} \equiv \omega^{-1}$ modulo Torsion in $\mathrm{Pic}(\underline{A}_{g,2})$, entsprechen die $\theta(Z;\underline{a},\underline{b})$ mit $\underline{a},\underline{b} \in \frac{1}{2}X/X$ im geeignet zu definierenden Sinne einer Basis von $p_*(H)$. Entsprechendes gilt für die direkten Bilder $p_*(\underline{H}^{2^1})$.

Es ist nun bekannt, daß diese Basen $\underline{H}$ erzeugen, und daß die θ-Nullwerte sogar eine projektive Einbettung von A_g definieren (genauer gesagt des groben Modulraums). Da wir das Verhalten der θ-Reihen am Rande auch kennen, so folgt leicht:

<u>Satz 6</u>:

Wähle n , und sei $A = \bigoplus_{m \geq 0} \Gamma(\overline{A}_{g,n}, \omega^m) \otimes \mathbb{Z}\left[^1/2\right]$. Dann wird für genügend großes m ω^m über $\overline{A}_{g,n} \otimes \mathbb{Z}\left[^1/2\right]$ von seinen globalen Schnitten erzeugt. Die dadurch definierte Abbildung

$$\overline{A}_{g,n} \otimes \mathbb{Z}\left[^1/2\right] \to \mathrm{Proj}(A)$$

hat als Bild ein projektives normales Schema $A^*_{g,n}$ über $\mathbb{Z}\left[e^{2\pi i/n}, {}^1/2n\right]$. Sie definiert eine offene Einbettung des groben Modulraums zu $A_{g,n}$ in $A^*_{g,n}$, und das Komplement hat auf jeder Faser Dimension $g(g-1)/_2$. Genauer hat das Bild jedes Stratums $\overline{A}_{n,\sigma}$ Dimension $(g-r_\sigma)(g-r_\sigma+1)/2$.

Das weitere Studium der arithmetischen Theorie der Siegel'schen Modulformen verdient sicher noch einige Aufmerksamkeit: Vermutlich gelten die obigen Resultate auch in Charakteristik zwei, und es sollte auch Anwendungen auf Kongruenzen geben. Dies würde aber wohl den Rahmen der hiesigen Ausführungen sprengen.

Eine weitere Verfolgung der Ansätze von L. Moret-Bailly ([MB]) scheint hier geboten.

§ 7 ETALE GARBEN

a) Durch die modulare Interpretation erhält man sofort étale Garben auf $\overline{A}_g$, nämlich die direkten Bilder $R^j p_*(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ $(p: G \to \overline{A}_g$ die universelle semiabelsche Varietät). Der Einfachheit halber formulieren wir die Aussagen für $\mathbb{Q}_l$-Garben, doch gelten entsprechende Varianten für $\mathbb{Z}_l$ oder $\mathbb{Z}/l^m\mathbb{Z}$. Außerdem nehmen wir an, daß unsere Kegelzerlegung glatt ist, so daß alle Strata $\overline{A}_{g,\sigma}$ glatt über $\mathbb{Z}$ sind.

Wähle eine Primzahl l und einen Level n. Wir arbeiten grundsätzlich über $Z\left[e^{2\pi i/n}, {}^1/nl\right]$.

Auf $A_{g,n}$ ist die Garbe $R^1p_*(\mathbb{Q}_l)$ lokal konstant und besitzt eine nicht ausgeartete symplektische Form mit Werten in $\mathbb{Q}_l(-1)$ ((-1) = Tate-Twist). Am Rand ist sie zahm verzweigt: $\overline{A}_{g,n}-A_{g,n}$ ist ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Seine irreduziblen Komponenten sind die Strata $\overline{A}_{g,n,\sigma}$ für $\sigma \subseteq B^+(X)_{\mathbb{R}}$ ein eindimensionaler Kegel der Zerlegung. (Für $n = 1$ entsprechen sie sogar eindeutig den Konjugationsklassen dieser σ unter $GL(X)$). Die Operation der zugehörigen Monodromie erhält man aus der Beschreibung der l-Torsionspunkte einer degenerierenden abelschen Varietät, die wir in § 3 (entsprechend [M4], 4.11) gegeben haben: Sei s_σ ein Erzeugendes der Halbgruppe $\langle\sigma\rangle \cap B^+(X)$. s_σ ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $s_\sigma : X_\sigma \times X_\sigma \to \mathbb{Z}$ und definiert ein unipotentes Element aus $Sp(2g,\mathbb{Z})$. (Wenn s_σ durch eine symmetrische Matrix S gegeben wird, ist die $\begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dieses Element liefert die gewünschte Monodromie-Transformation.

b) Da $R^1p^*(\mathbb{Q}_l)$ zahm verzweigt ist im Unendlichen, sind die direkten Bildgarben (über $\mathbb{Z}\left[e^{2\pi i/n}, {}^1/{}_{ln}\right]$) lokal konstant. (Siehe zum Beispiel [L]). Dasselbe gilt für aus $R^1p^*(\mathbb{Q}_l)$ abgeleitete Garben:

<u>Satz 7</u>:

Sei $\rho : Csp(2g,\mathbb{Q}) \to GL(V)$ eine algebraische Darstellung der Gruppe Csp der symplektischen Ähnlichkeiten auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum V . Für $n \geq 3$ bezeichne $\underline{F}_\rho$ die zugehörige étale $\mathbb{Q}_l$-Garbe auf $A_{g,n}$, $\psi : A_{g,n} \to \mathrm{Spek}(\mathbb{Z}\left[e^{2\pi/n}, \frac{1}{n}\right])$ die Projektion. Dann sind alle direkten Bilder $R^q\psi_*(\underline{F}_\rho)$, $R^q\psi_!(\underline{F}_\rho)$ lokal konstant.

<u>Bemerkung</u>:

Es wäre wünschenswert,auch die Eichler-Shimura Relation zu verallgemeinern. Dies scheint jedoch sehr kompliziert zu sein. Auch hier ist noch ein weiteres Feld für zukünftige Untersuchungen.

§ 8 DIE TORELLI-ABBILDUNG

a) Zu jeder glatten Kurve vom Geschlecht g gehört kanonisch ihre Jacobische, eine prinzipal polarisierte abelsche Varietät der Dimension g . Wenn man die glatte Kurve in eine singuläre stabile Kurve degenerieren läßt, ergibt sich eine semiabelsche Varietät, und es liegt nahe, die Gegebenheiten der allgemeinen Theorie in § 2,3 hier näher zu beschreiben. Wir untersuchen dabei zugleich das Verhalten der Torelli-Abbildung $M_g \to A_g$ zwischen den Modulräumen am Rande.

b) Sei wieder R ein kompletter normaler lokaler Ring, K der Quotientenkörper, $C \to \mathrm{Spek}(R)$ eine stabile Kurve, so daß die generische Faser C_η glatt ist. Zur speziellen Faser C_s konstruiert man einen

Graphen $\mathfrak{G}$, dessen Ecken V den irreduziblen Komponenten von C_s entsprechen, und dessen Kanten E die singulären Punkte auf C_s parametrisieren. Eine Kante hat als Endpunkte die beiden Ecken, die den irreduziblen Komponenten entsprechen, auf denen der singuläre Punkt liegt.

Wir nehmen weiter an, daß alle irreduziblen Komponenten von C_s geometrisch irreduzibel sind und alle Doppelpunkte rational über dem Restklassenkörper k von R . Dies gilt immer, wenn k algebraisch abgeschlossen ist.

Jeder Kante $e \in E$ ordnet man ein Hauptideal $I_e \subsetneqq R$ zu: Die Komplettierung $\hat{\mathcal{O}}_{C,e}$ des lokalen Rings im Punkt zu e ist isomorph zu $R[[S,T]]/(ST-f_e)$, und I_e werde erzeugt von f_e .

e) Sei $\Gamma = \pi_1(\mathfrak{G})$ die Fundamentalgruppe des Graphen $\mathfrak{G}$, und $\tilde{\mathfrak{G}} \longrightarrow \mathfrak{G}$ die universelle Überlagerung, mit Gruppe Γ . Dann gibt es eine Überlagerung formaler Schemata $\hat{\tilde{C}} \to \hat{C}$, ebenfalls mit Gruppe Γ .

Sei $X = \Gamma^{ab} = H_1(\mathfrak{G},\mathbb{Z})$, $Y = X^* = H^1(\mathfrak{G},\mathbb{Z})$, und T der zerfallende Torus mit Charaktergruppe X . Die Elemente aus $T(R)$ entsprechen den Homomorphismen $\Gamma \to R^*$. Jeden solchen Homomorphismus kann man benutzen, um eine äquivariante Operation von Γ auf dem trivialen Geradenbündel $\mathcal{O}_{\hat{\tilde{C}}}$ zu definieren, und damit ein Geradenbündel auf $\hat{C}$ oder auch C .

Da $\Gamma(\hat{\tilde{C}},\mathcal{O}_{\hat{\tilde{C}}}) = R$, erhält man so einen Isomorphismus

$$T(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kern}(\mathrm{Pic}(C) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\hat{\tilde{C}}))$$

c) Sei $G = \mathrm{Pic}^0(C/R)$. Dann ist G eine semiabelsche Varietät über R , und der eben angegebene Isomorphismus stammt aus einer exakten Sequenz

$$0 \to \hat{T} \to \hat{G} \to \hat{A} \to 0 \quad ,$$

mit A abelsch über R . Sei wieder $\tilde{G}$ die entsprechende Erweiterung

$$0 \to T \to \tilde{G} \to A \to 0 \quad .$$

Es ist $\widetilde{G}(R) = G(R)$. Man erhält auch eine Abbildung $T(K)\widetilde{G}(R) \to \mathrm{Pic}^0(C_\eta)$: Es reicht, die Restriktion $T(K) \to \mathrm{Pic}^0(C_\eta)$ anzugeben. Ein Element aus $T(K)$ wird gegeben durch einen Homomorphismus $\Gamma \to K^*$, welcher eine äquivariante Operation von Γ auf $\mathcal{O}_{\hat{C}} \otimes_R K$ definiert. Wähle ein Γ-invariantes gebrochenes kohärentes Ideal $J \subseteq \mathcal{O}_{\hat{C}} \otimes_R K$. Dies ergibt eine kohärente torsionsfreie Garbe auf $\hat{C}$ oder auch C , und auf der generischen Faser ein Geradenbündel vom Grad 0 .

Wir definieren nun eine Abbildung von X in den Kern des obigen Morphismus: Für $e \in E$ sei $\mathcal{O}_{C,e}$ der zugehörige lokale Ring, und f_e ein erzeugendes Element von I_e . Ein $x \in X$ wird gegeben durch ganze Zahlen $x_e \in \mathbb{Z}$, für alle $e \in E$, so daß für alle $p \in V$ $\sum_{e \to p} \pm x_e = 0$. Dabei wählt man eine Orientierung aller $e \in E$, und die Summe geht über alle e's mit Anfangs-oder Endpunkt p , wobei das Vorzeichen je nach Orientierung zu wählen ist. Wir definieren dann eine symmetrische Bilinearform

$$b : X \times X \subset K^*$$

durch

$$b(x,y) = \prod_{e \in E} f_e^{x_e y_e} .$$

Dann ist $b(x,x) \in \underline{m}$ = maximales Ideal R , falls $x \neq 0$. $b(\ )$ entspricht einem Homomorphismus

$$b : X \to T(K) .$$

Es gilt nun

<u>Satz 8</u>:

Es sei $\mathrm{Char}(K) \neq 2$

i) Es gibt einen Homomorphismus $\underline{c} : X \to \widetilde{G}(R) = \mathrm{Pic}^0(C)$, so daß für alle $x \in X$ $b(x)\,\underline{c}(x) \in \widetilde{G}(K)$ das triviale Geradenbündel auf C_η definiert.

ii) Sei $\underline{M}$ ein amples Geradenbündel auf A , welches die prinzipale Polarisation definiert. Dann ist die Zusammensetzung $X \xrightarrow{\underline{c}} \widetilde{G}(R) \to A(R)$ die zur Erweiterung $\widetilde{G}$ von A durch T

gehörige Abbildung. Ihre Liftung via $\underline{c}$ definiert ein zulässiges System von Isomorphismen für $(\tilde{G},A,\underline{M})$.

iii) G ist isomorph zu der semiabelschen Varietät, welche die Mumford-Konstruktion mit den obigen Daten liefert.

Beweis:

i) Sei $x \in X$. $b(x,\ )$ definiert eine Darstellung $\rho : \Gamma \to X \to K^*$.

Wir konstruieren ein ρ-invariantes gebrochenes Ideal $\underline{J} \subset \mathcal{O}_{\hat{C}} \otimes K$, welches lokal prinzipal ist, und dessen Einschränkung auf jede Komponente von $\hat{C}_s$ den Grad Null hat. Die Komponenten C_p von $\hat{C}_s$ werden parametrisiert durch $p \in \tilde{V}$ = Ecken $(\tilde{G})$. Wir wählen $\underline{J}$ so, daß es im Inneren von C_p von einem $g_p \in K^*$ erzeugt wird, und daß für eine Seite $e \in \tilde{E}$, welche p_1 und p_2 verbindet, $g_{p_2} = f_e^{x_e} g_{p_1}$. Es gibt sicher solche g_p's , und das Ideal $\underline{J}$ ist auch ρ-invariant. Es bleibt zu zeigen, daß man $\underline{J}$ auch in den Doppelpunkten lokal prinzipal wählen kann: Sei $e \in \tilde{E}$, und betrachte für $n \geq 1$ den Ring $(\mathcal{O}_{\hat{C},e}) \otimes (R/\underline{m}^n)$. Er besitzt zwei minimale Primideale $\underline{p}_1$ und $\underline{p}_2$, entsprechend $p_1, p_2 \in \nu$, welche durch e verbunden werden. $\underline{p}_1$ und $\underline{p}_2$ sind Hauptideale, und $\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2 = (f_e)$.

In der Komplettierung wird

$$\mathcal{O}_{\hat{C},e} \cong R[[S,T]]/(ST-f_e) ,$$

und $\hat{\underline{p}}_1$ und $\hat{\underline{p}}_2$ werden durch S bzw. T erzeugt.

Man kann dann $\underline{J}$ so wählen, daß es in $\mathcal{O}_{\hat{C},v} \otimes (R/\underline{m}^n)$ isomorph wird zu einer Potenz von $\underline{p}_1$ oder $\underline{p}_2$ (etwa zu $\underline{p}_1^{x_v}$) , und es folgt die Behauptung. Der Grad von $\underline{J}$ auf jedem C_p ist Null, da $\sum_{e \to p} \pm x_e = 0$.

Damit ist Teil i) bewiesen. Die Abbildung $\underline{c}$ ist natürlich eindeutig.

d) Es folgt schon aus den Sätzen 1 und 2, daß man G durch die Mumford-Konstruktion mit Hilfe einer Bilinearform b^* aus $\tilde{G}$ erhält. Wir müssen nun noch nachweisen, daß $\underline{c}$ ein zulässiges System von Isomorphismen definiert, und daß dann $b = b^*$. Man bettet R in einen diskreten Bewertungsring ein, und reduziert sich damit auf den Fall, daß R schon ein solcher ist. Dann ist das Problem für den Fall einer voll degenerierenden Kurve schon in [MD] behandelt worden, und wir folgen den dortigen Ausführungen: Wir können $C, \tilde{C}$, G und $\tilde{G}$ als rigid-analytische Objekte über K auffassen. Es ist dann $C = \tilde{C}/\Gamma$, und $\tilde{G}/i(X)$ ist rigid-analytische abelsche Varietät $(i = b\cdot c : X \to \tilde{G}(K))$. Wir definieren zunächst eine rigid-analytische Abbildung $\phi : C \times C \to \tilde{G}/i(X)$, via $\tilde{\phi} : \tilde{C} \times \tilde{C} \to \tilde{G}$. Dazu müssen wir für jeden endlichen Erweiterungskörper L von K eine Abbildung $\tilde{\phi} : \tilde{C}(L) \times \tilde{C}(L) \to \tilde{G}(L)$ definieren. Da alle unsere Konstruktionen invariant unter Grundkörpererweiterung sein werden, reicht es, $\tilde{\phi}$ auf $\tilde{C}(K) \times \tilde{C}(K)$ zu definieren. Dazu ersetzen wir zunächst C und $\tilde{C}$ durch ihre regulären semistabilen Modelle über R . Dies ändert nichts an allen Definitionen und Behauptungen. Dann ist $\tilde{C}(K) = \tilde{C}(R)$. Seien also $z_1, z_2 \in C(R)$ zwei Punkte. Der Divisor $D = \sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma((z_1) - (z_2))$ ist dann Γ-invariant auf $\tilde{C}$, doch hat die Einschränkung von $\mathcal{O}(D)$ auf die irreduziblen Komponenten C_p im allgemeinen nicht den Grad Null. Dies wird nun korrigiert:

e) Wähle ein p_0 , und definiere eine Abbildung

$$f : \begin{array}{l} p \longmapsto f(p_0,p) \\ \mathcal{V} \longrightarrow K^* \end{array}$$

wie folgt: Orientiere Γ-invariant die Kanten $\mathcal{E}$. Es gilt:

i) $f(p_0,p_0) = 1$

ii) Wenn der kürzeste Weg in $\mathfrak{G}$ von p nach p_0 der Komponente als nächste Ecke p_1 trifft, so sei

$f(p_0,p) = f(p_0,p_1)$ wenn die Orientierung der Kante e zwischen p und p_1 so ist, daß p Anfangs- und p_1 Endpunkt ist.

$f(p_0,p) = f(p_0,p_1)f_e$, bei anderer Orientierung.

Definiere

$$g(p_1,p_2;p) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \left(\frac{f(\gamma p_1,p)\ f(\gamma p_2,p_0)}{f(\gamma p_2,p)\ f(\gamma p_1,p_0)} \right) \in K^* \quad .$$

Dabei seien $p_1, p_2 \in \tilde{\mathcal{V}}$. Im Produkt ist ein Faktor nur dann verschieden von Eins, wenn die kürzesten Verbindungen (in $\tilde{g}$) von γp_1 und γp_2 mit dem Weg $\overrightarrow{p_0 p}$ verschiedene Fußpunkte auf $\overrightarrow{p_0 p}$ haben. Dies gilt aber nur für endlich viele γ's . (Die Distanz von p_1 nach p_2 muß größer sein als Konstante + Distanz $(p_0, \gamma p_1)$) .

Es ist $g(p_1,p_3;p) = g(p_1,p_2;p)\; g(p_2,p_3;p)$.

Wenn man von p zu einem benachbarten $p' \in \tilde{V}$ übergeht, und e die Kante zwischen p und p' bezeichnet, mit p=Anfangspunkt(e), und p'=Endpunkt(e), so ist

$$\frac{g(p_1,p_2,p')}{g(p_1,p_2,p)} = \prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{f(\gamma p_1,p')\; f(\gamma p_2,p)}{f(\gamma p_2,p')\; f(\gamma p_1,p)} .$$

Die Faktoren sind verschieden von Eins nur dann, wenn e auf dem Weg von γp_1 nach γp_2 liegt, und zwar erhält man dann f_e , wenn die Orientierung von e mit der des Weges übereinstimmt, sonst f_e^{-1} .
Es folgt:

i) Sei $\delta \in \Gamma$, entsprechend $x = (x_e) \in X$.

Dann ist

$$\frac{f(p_1,p_2;\delta(p))}{f(p_1,p_2;p)} = \prod_{e\in\overrightarrow{p_1 p_2}} f_e^{\pm x_e} .$$

Der Exponent ist $+1$, wenn die Orientierungen von e und $\overrightarrow{p_1 p_2}$ übereinstimmen, sonst -1 .

ii) Sei $\underline{J}(p_1,p_2) \subseteq \mathcal{O}_{\underline{C}}^{\Delta} \otimes K$ das invertierbare Ideal, welches auf C_p von $f(p_1,p_2;p)$ erzeugt wird. (Die Existenz folgt ähnlich wie bei der Konstruktion von $\underline{c}$) .
Dann ist

$$\operatorname{grad}(\underline{J}(p_1,p_2)\; /\; C_p) =$$

$$\begin{array}{ll} 0\ , & \text{falls } p \notin \Gamma\cdot p_1 \cup \Gamma\cdot p_2\ ,\ \text{oder } p\in\Gamma\cdot p_1\cap\Gamma\cdot p_2 \\ -1\ , & \text{falls } p\in\Gamma\cdot p_1,\ p\notin\Gamma p_2 \\ +1\ , & \text{falls } p\in\Gamma\cdot p_2,\ p\notin\Gamma p_1 \end{array} .$$

Somit hat für $z_1 \in C_{p_1}$, $z_2 \in C_{p_2}$ die Einschränkung von $\underline{L}(z_1,z_2) = \underline{J}(p_1,p_2) \otimes \mathcal{O}(D)$ Grad 0 auf allen Komponenten. Für $\delta \in \Gamma$, entsprechend $s = (x_e) \in X$, ist

$$\delta^*(\underline{L}(z_1,z_2)) = \Big(\prod_{e \in \overrightarrow{p_1p_2}} f_e^{\pm x_e}(p_1,p_2)\Big)\underline{L}(z_1,z_2) \quad .$$

Wenn man also einen Morphismus

$$\rho : \Gamma \to X \to K^*$$

definiert durch $\rho(\delta) = \prod_{e \in \overrightarrow{p_1p_2}} f_e^{\pm x_e}$, entsprechend einem $\rho \in T(K)$, so kann man Γ via ρ äquivariant operieren lassen und erhält ein Geradenbündel aus $G(R) = \mathrm{Pic}^0(C)$. Wenn $p_1 = p_2$ ist, so wird dieses Geradenbündel durch den Divisor $z_1 - z_2$ auf C gegeben. Wenn $z_2 = \gamma(z_1)$ mit $\gamma \in \Gamma$, entsprechend $y = (y_e) \in X$, so erhält man das Geradenbündel zu $\underline{c}(y) \in \tilde{G}(R)$. Wenn man das obige Element aus $G(R)$ noch mit $\rho \in T(K)$ multipliziert, ergibt sich schließlich eine Abbildung

$$\tilde{\phi} : \tilde{C}(R) \times \tilde{C}(R) \to T(K)\tilde{G}(R) = \tilde{G}(K) \quad .$$

mit

i) $\tilde{\phi}(z_1,z_2) + \tilde{\phi}(z_2,z_3) = \tilde{\phi}(z_1,z_3)$

ii) $\tilde{\phi}(z_1,\gamma(z_1)) = i(y) \qquad (y = \mathrm{Bild}(\gamma) \in X\ )$

iii) Wenn z_1, z_2 in derselben Komponente liegen, so ist $\tilde{\phi}(z_1,z_2) \in \tilde{G}(R) = \mathrm{Pic}^{\mathrm{o}}(C)$ gegeben durch $\mathcal{O}(z_1 - z_2)$.

f) Außerdem ist $\tilde{\phi}$ verträglich mit Erweiterungen des Grundkörpers. Andererseits hat man über K eine kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : C_\eta \times C_\eta \to G_\eta &= \mathrm{Pic}^0(C_\eta) \\ (z_1,z_2) &\longmapsto \mathcal{O}(z_1 - z_2) \quad . \end{aligned}$$

Es ist G der rigid-analytische Quotient $\tilde{G}/_{i^*(X)}$, mit einer Gruppe von Perioden $i^*(X) \subseteq \tilde{G}(K)$. Es ergibt sich dann eine rigid-analytische Abbildung der universellen Überlagerungen

$$\tilde{C} \times \tilde{C} \to \tilde{G} \quad .$$

Da diese Abbildung mit $\tilde{\phi}$ nahe der Diagonale übereinstimmt, ist sie nach dem Identitätssatz gleich $\tilde{\phi}$.

Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} \times \tilde{C} & \xrightarrow{\phi} & \tilde{G} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Gamma\times\Gamma} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i^*(X)} \\ C \times C & \xrightarrow{\phi} & G \end{array} \quad .$$

Da $\tilde{\phi}(z_1,\delta z_1) \in i(X)$, ist $i(X) \subseteq i^*(X)$. Aus einer Betrachtung der Bewertung folgt, daß $i(X)$ endlichen Index in $i^*(X)$ hat. ϕ faktorisiert dann über $\tilde{G}/i(X)$. Dies ist eine endliche Überlagerung von G , damit algebraisch, und wegen der bekannten Eigenschaften der Jacobi'schen ist notwendigerweise $i(X) = i^*(X)$. Wir müssen nun noch zeigen, daß $i = i^*$. Auf jeden Fall stimmen sie schon überein bis auf einen Automorphismus von X . Da i^* ebenso wie i von einer definiten symmetrischen Bilinearform stammt, wird dieser Isomorphismus in einer geeigneten Basis durch eine positiv definite symmetrische Matrix definiert.

g) Alles in allem haben wir den Satz 8 bewiesen bis auf die Tatsache, daß man für ii) und iii) i durch einen Automorphismus von X abändern muß. Wir wollen zeigen, daß dieser Automorphismus die Identität ist.

Es reicht, dies im "universellen" Fall zu tun, das heißt,wenn R die Basis einer versellen Deformation der speziellen Faser C_s ist. Dann ist R regulär, und die f_e für $e \in E$ bilden einen Teil eines regulären Parametersystems. Für jedes e sei $\underline{p}_e \subseteq R$ das zugehörige Primideal der Höhe 1 und G_e die Faser von G über $k(\underline{p}_e)$. Dann ist G_e semiabelsch, mit einem Torusteil der Dimension ≤ 1 . Die Dimension ist genau dann gleich 1 , wenn die Linearform $x = (x_e) \longmapsto x_e$ auf X nicht verschwindet. Falls dies der Fall ist, so besteht der Kern dieser linearen Abbildung aus den x , die auf dem Torusteil von G_e verschwinden. (Der Torusteil von G_e ist in natürlicher Weise ein

Untertorus von T). Aus der Mumford-Konstruktion folgt, daß dies genau dann für x zutrifft, wenn $i^*(x)$ ganz ist in $R_{\mathfrak{p}_e}$.

Wenn $\lambda: X \xrightarrow{\sim} X$ der Automorphismus mit $i^* = i \circ \lambda$ ist, so gilt dann

$$x_e = 0 \Longleftrightarrow \lambda(x)_e = 0$$

λ respektiert also alle Hyperebenen $\{x_e = 0\}$, kann trigonalisiert werden und hat somit Eigenwerte ± 1 . Da man λ aber auch durch eine symmetrische positiv definite Matrix darstellen kann, ist $\lambda = \mathrm{id}$. Dies beendet den Beweis von Satz 8.

Wir erhalten auch Informationen über das Verhalten der Abbildung $M_g \to A_g$ am Rande: Bei vorgegebenem g gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für den Graphen $\mathfrak{G}$ einer stabilen Kurve vom Geschlecht g . Zu jedem solchen $\mathfrak{G}$ erhält man symmetrische Bilinearformen $(x,y) \to x_e y_e$ auf $X = H_1(\mathfrak{G}, Z)$ für $e \in E$. Dann bildet sich die verselle Deformation einer stabilen Kurve mit Graph $\mathfrak{G}$ genau dann in die mit der Kegelzerlegung $\{\sigma\}$ definierte Kompaktifizierung $\overline{A}_g$ ab, wenn es ein σ gibt, welches alle Bilinearformen $x_e y_e$ auf X enthält. Wenn dies nicht der Fall ist, so muß man zunächst noch die verselle Deformation durch eine Modifikation ersetzen.

§ 9 DIE KOMPLEXE THEORIE

a) Nach Basiserweiterung zu den komplexen Zahlen erhält man aus $\overline{A}_g$, $\underline{S}$ u.s.w. komplexe Räume. Es ergeben sich die toroidalen Kompaktifizierungen aus [AMRT] oder auch [N] . Da sich auch die Mumford-Konstruktion ins analytische übersetzt, kann man auch die komplex-analytische Version der universellen semiabelschen Varietät beschreiben:

Der Torus S wird über $\mathbb{C}$ gegeben durch

$$S(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{g(g+1)/2} / \mathbb{Z}^{g(g+1)/2} = B(\mathbb{C}^g)/B(\mathbb{Z}^g) \quad .$$

Wenn $\mathbb{H}_g \subset \mathbb{C}^{g(g+1)/2}$ die Siegel'sche Halbebene bezeichnet ($\mathbb{H}_g = \{Z = X+iY / Z = {}^tZ,\ Y > 0\}$) , so erhält $S(\mathbb{C})$ als offene

Teilmenge $\mathbb{H}_g/B(\mathbb{Z}^g)$.

Wenn $\sigma \subset B^+(\mathbb{R}^g)$ ein konvexer rationaler Polyeder ist, so bestimmt σ eine Torus-Einbettung $S \subseteq S_\sigma$. S_σ ist affin algebraisch, und eine Basis des Ringes der algebraischen Funktionen wird gegeben durch

$$\chi_M(Z) = e^{2\pi i \; \mathrm{Spur}(MZ)} ,$$

M eine halbganze symmetrische Matrix, mit ganzen Diagonalelementen, welche im Dual $\sigma^\vee$ liegt $(Y \in \sigma \Rightarrow \mathrm{Sp}(MY) \geqq 0)$. Weiter existiert auf S eine "universelle" Bilinearform

$$b : \mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g \to \mathcal{O}_S$$

$$b(x,y) = \chi_M ,$$

wobei M die Matrix ist mit Einträgen $m_{jk} = \frac{1}{2}(x_j y_k + x_k y_j)$. $b(x,x)$ setzt sich fort zu einer regulären Funktion auf S_σ .

Sei $\underline{X} \subseteq \mathbb{Z}^g$ die étale Untergruppe, deren Faser über $s \in S_\sigma$ aus den $x \in \mathbb{Z}^e$ besteht mit $b(x,x)(s) \neq 0$. Dann setzt sich b fort zu einer Bilinearform

$$b : \underline{X} \times \mathbb{Z}^g \to \mathcal{O}^*_{S_\sigma} ,$$

und definiert damit $b : \underline{X} \to (\mathbb{C}^*)^g = T$. b ist über $\mathbb{H}_g/B(\mathbb{Z}^g)$ eine Einbettung, und der Quotient $G = T/b(\underline{X})$ ist eine semiabelsche Varietät über einem offenen Stück von S_σ . Dort ist S_σ lokal isomorph zu $\overline{A}_g(\mathbb{C})$, und G liefert die universelle semiabelsche Varietät.

b) Das obige G besitzt ein Geradenbündel $\underline{L}$, welches über $\mathbb{H}_g/B(\mathbb{Z}^g)$ eine Polarisation definiert. Das Pullback von $\underline{L}$ nach T ist kanonisch trivial, und ein globaler Schnitt von $\underline{L}$ wird geliefert durch die θ-Reihe auf T :

$$\theta(e^{2\pi i z_1}, \ldots, e^{2\pi i z_g}) =$$
$$= \sum_{\underline{m} = (m_1,\ldots,m_g) \in \mathbb{Z}^g} e^{i\pi(\underline{m}Z\,{}^t\underline{m} + \sum_{j=1}^{g} m_j Z_{jj})} e^{2\pi i \underline{m}\,{}^t\underline{z}}$$

b ist die zu den Koeffizienten von θ gehörige Bilinearform (im Sinne von § 2).

c) Das Quadratintegral von g-Formen liefert eine kanonische hermite'-sche Metrik auf $\omega = \Lambda^g \underline{t}^*{}_G$:

$$||\alpha||^2(s) = \int_{G_s} ||\alpha||^2 \quad .$$

Man rechnet aus, daß für $Z = X+iY \in \mathbb{H}_g$, entsprechend $s \in S$,

$$\left|\left|\frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_g}{z_g}\right|\right|^2$$

bis auf einen konstanten Faktor gegeben ist durch $\det(Y)$. Da die Einträge von Y sich aus den Logarithmen der absoluten Beträge der χ_M berechnen, hat die Metrik auf ω_G am Rande nur eine logarithmische Singularität.

ANHANG:

Dieses Manuskript gibt den Kenntnisstand zur Zeit der Arbeitstagung wieder (Juni 1984). Inzwischen (September 1984) gab es die folgenden Entwicklungen:

1.) Die Thesis von C.L. Chai liegt mir vor.

2.) Die minimale Kompaktifizierung läßt sich auch in Charakteristik 2 behandeln:

Betrachte $A_{g,n}$ über $\mathbb{Z}\left[{}^{1}/n, e^{2\pi i/n}\right]$.

Sei $R = \bigoplus_{m \geqq 0} \Gamma(\overline{A}_{g,n}, \omega^{\otimes m})$, $A^*_{g,n} = \mathrm{Proj}(R)$.

Dann gilt:

i) Eine geeignete Potenz von ω wird von globalen Schnitten erzeugt, so daß man eine Abbildung des groben Modulraums (zu $\overline{A}_{g,n}$) $\overline{A}_{g,n}$ nach $A^*_{g,n}$ erhält:

$$\phi : \overline{A}_{g,n} \to A^*_{g,n}$$

ii) $\phi | A_{g,n}$ ist eine offene Einbettung, und $A_{g,n} = \phi^{-1}(\phi(A_{g,n}))$

iii) $A^*_{g,n} - A_{g,n}$ hat Kodimension g in $A^*_{g,n}$.

Der Beweis benutzt θ-Funktionen. Einige Andeutungen: Man betrachtet die Überlagerung $M \to A_g$, welche die symmetrischen Geradenbündel in der Polarisationsklasse liefert (nicht zu verwechseln mit level-2-Strukturen). Für m ungerade (der Einfachheit halber) erhält man dann ein Geradenbündel $\underline{L}_m$ auf $M \times_{A_g} A_{g,m}$, welches für $m \geq 3$ von seinen globalen Schnitten erzeugt wird, und so daß $\underline{L}_m = \frac{m}{2} \cdot \omega$ in $\mathrm{Pic} \otimes \mathbb{Q}$.

Dies liefert globale Erzeugtheit über A_g . Man muß nun noch den Rand betrachten, sowie zeigen, daß die Fasern von $\phi : \overline{A}_g \to A^*_g$ endlich über A_g sind.

Literatur

[A] M. Artin, Algebraization of Formal Moduli I, in Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, 21 - 71, Princeton University Press, Princeton 1969.

[AMRT] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y. Tai, Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties, Math. Sci. Press, Brookline 1975.

[C] C.-L. Chai, Thesis, Harvard 1984.

[DM] P. Deligne, D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Publ. Math. IHES 36 (1969), 75 - 110.

[DR] P. Deligne, M. Rapoport, Les schémas de modules de courbes elliptiques, Springer Lecture Notes 349 (1973) 143 - 316.

[F] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. Math. 73 (1983), 349 - 366.

[SGA7] A. Grothendieck, Groupes de monodromie en Gêometrie Algebrique (SGA 7 I), Springer Lecture Notes 288 (1972).

[KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal Embeddings I, Springer Lecture Notes 399 (1972).

[L] G. Laumon, Semi-Continuité du Conducteur de Swan (d'après P. Deligne) Séminaire E.N.S. (1978/79), Exposé 9.

[MD] Yu. Manin, V. Drinfeld, Periods of p-adic Schottky groups, Crelles Journal 262 (1973), 239 - 247.

[MB] L. Moret-Bailly, Familles de varietés abéliennes, Thèse, Orsay (1984).

[M1] D. Mumford, Geometric Invariant Theory, Springer-Verlag, Heidelberg 1965.

[M2] D. Mumford, On the Equations Defining Abelian Varieties, Invent. Math. 1 (1966), 287 - 354.

[M3] D. Mumford, An Analytic Construction of Degenerating Curves over Complete Local Rings, Comp. Math. 24 (1972), 129 - 174.

[M4] D. Mumford, An Analytic Construction of Degenerating Abelian Varieties over Complete Rings, Comp. Math. 24 (1972), 239 - 272.

[N] Y. Namikawa, Toroidal compactification of Siegel spaces, Springer Lecture Notes 812 (1980).