DIE ERSTEN 50 MILLIONEN PRIMZAHLEN

von

Prof. Dr. D. ZAGIER

1977
BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL
UND STUTTGART

to my parents

Antrittsvorlesung, gehalten am 5. Mai 1975 an der Universität Bonn.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Zagier, Don Bernard
Die ersten 50 [fünfzig] Millionen Primzahlen. –
1. Aufl. – Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1977.
(Elemente der Mathematik: Beih.: Nr. 15)
ISBN 3-7643-0967-9

Beihefte zur Zeitschrift «Elemente der Mathematik»
Suppléments à la «Revue de mathématiques élémentaires»
Beiheft Nr. 15 – © Birkhäuser Verlag Basel, 1977
ISBN 3-7643-0967-9

DIE ERSTEN 50 MILLIONEN PRIMZAHLEN

Ich möchte Ihnen heute von einem Gebiet erzählen, auf dem ich zwar selber nicht gearbeitet habe, das mich aber immer außerordentlich gefesselt hat, und das wohl die Mathematiker von der frühesten Vorgeschichte bis zur Gegenwart fasziniert hat – nämlich die Frage nach der Verteilung der Primzahlen.

Was eine Primzahl ist, ist Ihnen sicherlich allen bekannt: Sie ist eine von 1 verschiedene natürliche Zahl, die durch keine andere natürliche Zahl außer 1 teilbar ist. Mindestens ist das die Definition des Zahlentheoretikers; manchmal haben andere Mathematiker freilich andere Definitionen. So ist für den Funktionentheoretiker eine Primzahl eine ganzzahlige Nullstelle der analytischen Funktion

$$1 - \frac{\sin \dfrac{\pi\, \Gamma(s)}{s}}{\sin \dfrac{\pi}{s}} \; ;$$

für den Algebraiker ist sie

«die Charakteristik eines endlichen Körpers»

oder

«ein Punkt aus Spec $\boldsymbol{Z}$»

oder

«eine nichtarchimedische Bewertung»;

für den Kombinatoriker werden die Primzahlen definiert durch die Rekursion [1]

$$p_{n+1} = \left[1 - \log_2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} \frac{(-1)^r}{2^{p_{i_1} \cdots p_{i_r}} - 1}\right)\right]$$

($[x]$ = ganzzahliger Teil von x);

und schließlich definiert sie neuerdings der Logiker als die positiven Werte des Polynoms [2]

$$\begin{aligned}
&F(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z) \\
&= \{k+2\}\{1-(w z+h+j-q)^2-(2 n+p+q+z-e)^2-(a^2 y^2-y^2+1-x^2)^2 \\
&\quad -(\{e^4+2 e^3\}\{a+1\}^2+1-o^2)^2-(16\{k+1\}^3\{k+2\}\{n+1\}^2+1-f^2)^2 \\
&\quad -\big(\{(a+u^4-u^2 a)^2-1\}\{n+4 d y\}^2+1-\{x+c u\}^2\big)^2-(a i+k+1-l-i)^2 \\
&\quad -(\{g k+2 g+k+1\}\{h+j\}+h-z)^2-(16 r^2 y^4\{a^2-1\}+1-u^2)^2 \\
&\quad -(p-m+l\{a-n-1\}+b\{2 a n+2 a-n^2-2 n-2\})^2-(z-p m+p l a-p^2 l \\
&\quad +t\{2 a p-p^2-1\})^2-(q-x+y\{a-p-1\}+s\{2 a p+2a-p^2-2 p-2\})^2 \\
&\quad -(a^2 l^2-l^2+1-m^2)^2-(n+l+v-y)^2\}\,.
\end{aligned}$$

Ich hoffe aber, Sie sind mit der ersten Definition, die ich gegeben habe, zufrieden.

Es gibt zwei Tatsachen über die Verteilung der Primzahlen, von denen ich hoffe, Sie dermaßen zu überzeugen, daß sie für immer in Ihrem Herzen eingraviert sind. Die eine ist, daß die Primzahlen, trotz ihrer einfachen Definition und Rolle als Bausteine der natürlichen Zahlen, zu den willkürlichsten, widerspenstigsten Objekten gehören, die der Mathematiker überhaupt studiert. Sie wachsen wie Unkraut unter den natürlichen Zahlen, scheinbar keinem anderen Gesetz als dem Zufall unterworfen, und kein Mensch kann voraussagen, wo wieder eine sprießen wird, noch einer Zahl ansehen, ob sie prim ist oder nicht. Die andere Tatsache ist viel verblüffender, denn sie besagt just das Gegenteil – daß die Primzahlen die ungeheuerste Regelmäßigkeit aufzeigen, daß sie durchaus Gesetzen unterworfen sind und diesen mit fast peinlicher Genauigkeit gehorchen.

Um die erste dieser beiden Behauptungen zu veranschaulichen, zeige ich Ihnen zunächst eine Liste von den primen und den zusammengesetzten Zahlen bis 100, wobei ich neben 2 nur die ungeraden aufgeführt habe

prim		nicht prim	
2	43	9	63
3	47	15	65
5	53	21	69
7	59	25	75
11	61	27	77
13	67	33	81
17	71	35	85
19	73	39	87
23	79	45	91
29	83	49	93
31	89	51	95
37	97	55	99
41		57	

oder wiederum eine Liste von den Primzahlen aus den hundert Zahlen, die 10 000 000 vorangehen bzw. folgen:

Die Primzahlen zwischen 9 999 900 und 10 000 000	Die Primzahlen zwischen 10 000 000 und 10 000 100
9 999 901	10 000 019
9 999 907	10 000 079
9 999 929	
9 999 931	
9 999 937	
9 999 943	
9 999 971	
9 999 973	
9 999 991	

Ich glaube, Sie werden zustimmen, daß kein sichtbarer Grund vorhanden ist, warum eine Zahl prim ausfällt und die andere nicht. Vielmehr hat man beim Anblick dieser

Zahlen das Gefühl, vor einem der unergründlichen Geheimnisse der Schöpfung zu stehen. Daß auch die Mathematiker dieses Geheimnis nicht durchdrungen haben, wird vielleicht am deutlichsten durch den Eifer bezeugt, mit dem sie nach immer größeren Primzahlen suchen. Bei Zahlen, die gesetzmäßig anwachsen, wie etwa den Quadraten oder den Zweierpotenzen, wäre es natürlich witzlos, ein größeres Exemplar als die vorher bekannten hinzuschreiben. Bei Primzahlen dagegen gibt man sich große Mühe, genau das zu tun. Im Jahre 1876 zum Beispiel hat Lucas bewiesen, daß die Zahl $2^{127}-1$ prim ist, und 75 Jahre blieb sie unübertroffen – was vielleicht nicht überraschend ist, wenn man die Zahl sieht:

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727\,.$$

Erst 1951, mit dem Erscheinen der elektronischen Rechenanlagen, fand man größere Primzahlen. Die Daten über die nacheinanderfolgenden Titelinhaber können Sie in der nachfolgenden Tabelle sehen [3]. Augenblicklich ist die 6002ziffrige Zahl $2^{19937}-1$, die ich nicht hinschreiben möchte, der Glückspilz, der sich dieses Ruhms brüsten kann. Wer mir nicht glaubt, kann im Guinness-Buch der Weltrekorde nachgucken.

Die größte bekannte Primzahl

p	Anzahl der Ziffern	Entdeckt im Jahr	Von wem
$2^{127}-1$	39	1876	Lucas
$(2^{148}+1)/17$	44	1951	Ferrier
$114\ (2^{127}-1)+1$	41	1951	Miller + Wheeler + EDSAC 1
$180\ (2^{127}-1)^2+1$	79		
$2^{521}-1$	157		
$2^{607}-1$	183		
$2^{1279}-1$	386	1952	Lehmer + Robinson + SWAC
$2^{2203}-1$	664		
$2^{2281}-1$	687		
$2^{3217}-1$	969	1957	Riesel + BESK
$2^{4253}-1$	1281	1961	Hurwitz + Selfridge + IBM 7090
$2^{4423}-1$	1332		
$2^{9689}-1$	2917		
$2^{9941}-1$	2993	1963	Gillies + ILIAC 2
$2^{11213}-1$	3376		
$2^{19937}-1$	6002	1971	Tuckerman + IBM 360

Viel interessanter ist aber die Frage nach den Gesetzen, die die Primzahlen beherrschen. Ich habe Ihnen vorhin eine Liste der Primzahlen bis 100 gezeigt. Hier ist dieselbe Information in graphischer Darstellung (siehe Fig. 1). Die mit $\pi(x)$ bezeichnete Funktion, von der ab jetzt dauernd die Rede sein wird, ist die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich x; sie fängt also bei Null an und springt bei jeder Primzahl $x = 2, 3, 5$ usw. um eins hoch. Schon in diesem Bild sieht man, daß das Anwachsen von $\pi(x)$ trotz kleiner lokaler Schwankungen im Großen ziemlich regelmäßig ist. Wenn ich aber den Bereich der x-Werte von 100 auf 50 000 ausdehne, wird diese Regelmäßigkeit auf atemberaubende Weise deutlich, denn der Graph sieht so aus, wie in Fig. 2 abgebildet.

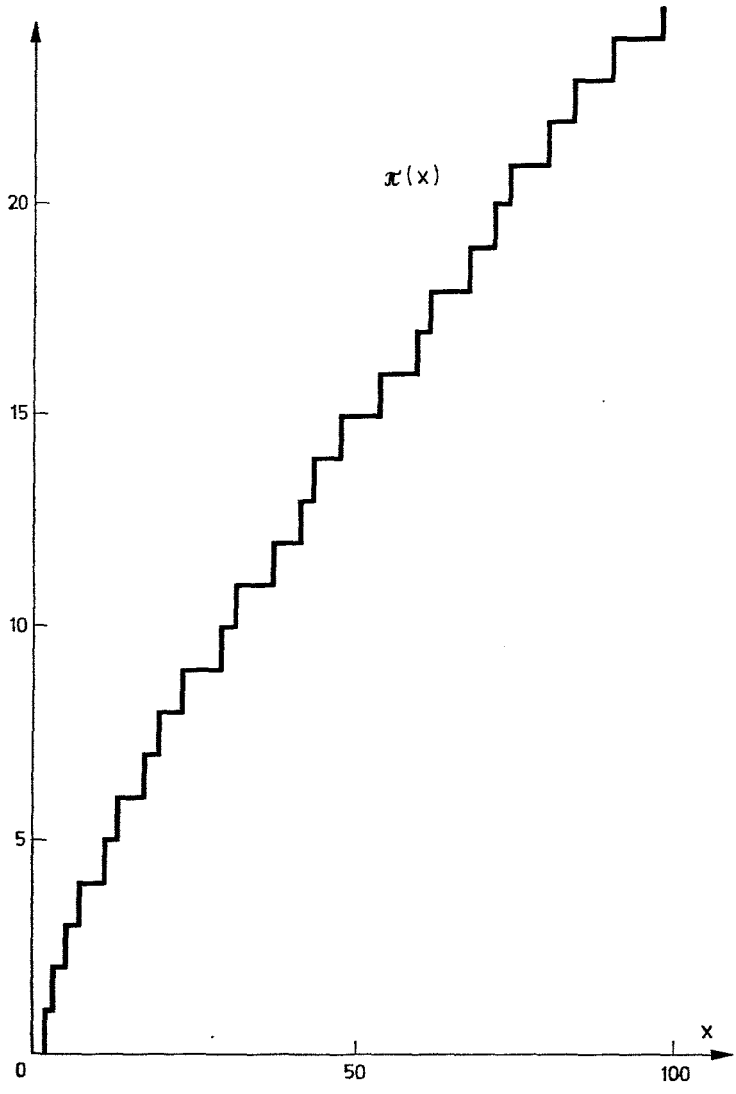

Fig. 1

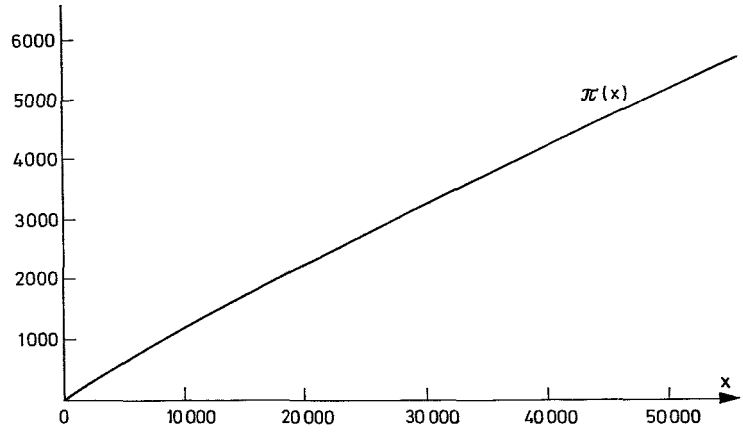

Fig. 2

Für mich gehört die Glätte, mit der diese Kurve steigt, zu den verblüffendsten Tatsachen der Mathematik.

Nun, wo es Gesetze gibt, gibt es auch Wissenschaftler, die dahinter zu kommen versuchen, und das hier ist keine Ausnahme. Es ist auch nicht schwer, eine empirische Regel zu finden, die das Wachstum der Primzahlen gut beschreibt. Bis 100 gibt es 25 Primzahlen, also ein Viertel der Zahlen; bis 1000 gibt es 168, also ungefähr ein Sechstel; bis 10 000 sind 1229 Primzahlen, also ungefähr ein Achtel. Wenn wir diese Liste fortsetzen und für hunderttausend, eine Million usw. jeweils das Verhältnis von Primzahlen zu natürlichen Zahlen ausrechnen, so finden wir diese Zahlen:

x	$\pi(x)$	$x/\pi(x)$
10	4	2,5
100	25	4,0
1 000	168	6,0
10 000	1 229	8,1
100 000	9 592	10,4
1 000 000	78 498	12,7
10 000 000	664 579	15,0
100 000 000	5 761 455	17,4
1 000 000 000	50 847 534	19,7
10 000 000 000	455 052 512	22,0

(In dieser Tabelle stellen die Werte von $\pi(x)$, die so unachtsam hingeschrieben sind, Tausende von Stunden mühseligen Rechnens dar.) Wir sehen, daß das Verhältnis von x zu $\pi(x)$ immer um ungefähr 2,3 hochgeht, wenn wir von einer Zehnerpotenz zur nächsten übergehen. Mathematiker erkennen diese Zahl 2,3 sofort als den Logarithmus von 10 (zu der Basis e natürlich). So kommt man auf die Vermutung, daß

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

wobei das Zeichen $\sim$ bedeutet, daß das Verhältnis $\pi(x) : x/\log x$ mit wachsendem x nach 1 strebt. Diese Beziehung, die erst 1896 bewiesen wurde, nennen wir heute den *Primzahlsatz*; Gauß, der größte aller Mathematiker, hat sie schon als Fünfzehnjähriger gefunden, indem er Primzahltabellen, die in einer ihm im Jahr zuvor geschenkten Logarithmentafel enthalten waren, studierte. Während seines ganzen Lebens hat sich Gauß lebhaft für die Verteilung der Primzahlen interessiert und ausgedehnte Rechnungen durchgeführt. In einem Brief an Enke [4] beschreibt er, wie er «sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt» habe, «um bald hie bald dort eine Chiliade [das heißt ein Intervall von 1000 Zahlen] abzuzählen», bis er schließlich die Primzahlen bis 3 Millionen (!) aufgezählt und mit den Formeln verglichen hatte, die er für ihre Verteilung vermutete.

Der Primzahlsatz besagt, daß $\pi(x)$ asymptotisch, das heißt mit einem Relativfehler von 0%, gleich $x/\log x$, ist. Wenn wir aber den Graph der Funktion $x/\log x$ mit $\pi(x)$ vergleichen, so sehen wir, daß die Funktion $x/\log x$ zwar das Verhalten von $\pi(x)$ qualitativ widerspiegelt, jedoch nicht mit einer solchen Genauigkeit mit dieser übereinstimmt, als daß die Glätte der Funktion $\pi(x)$ dadurch erklärt wäre:

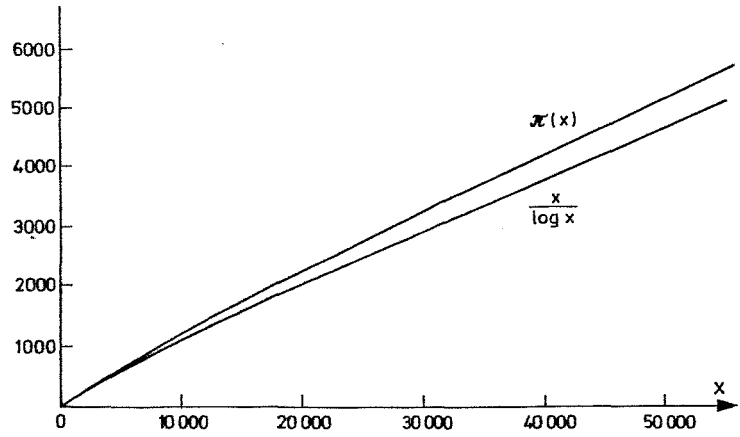

Fig. 3

Es liegt also nahe, nach besseren Approximationen zu fragen. Wenn wir die obige Tabelle von den Verhältnissen von x zu $\pi(x)$ wieder angucken, so sehen wir, daß dieses Verhältnis ziemlich genau gleich $\log x - 1$ ist. Durch sorgfältigeres Rechnen mit vollständigeren Daten über $\pi(x)$ hat Legendre [5] 1808 gefunden, daß man eine besonders gute Approximation erhält, wenn man anstatt 1 die Zahl 1,08366 von $\log x$ abzieht, also

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1{,}08366}.$$

Eine andere sehr gute Approximation zu $\pi(x)$, die erstmalig von Gauß angegeben wurde, erhält man, indem man die empirische Tatsache als Ausgangspunkt nimmt, daß die Frequenz der Primzahlen um eine sehr große Zahl x fast genau gleich $1/\log x$

ist. Danach wäre die Anzahl der Primzahlen bis x ungefähr durch die *logarithmische Summe*

$$\mathrm{Ls}(x) = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \cdots + \frac{1}{\log x}$$

gegeben, oder, was fast dasselbe ist [6], durch das *logarithmische Integral*

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\, dt\,.$$

Wenn wir den Graph von $\mathrm{Li}(x)$ mit dem von $\pi(x)$ vergleichen, so sehen wir, daß die beiden innerhalb der Toleranz des Bildes genau übereinstimmen:

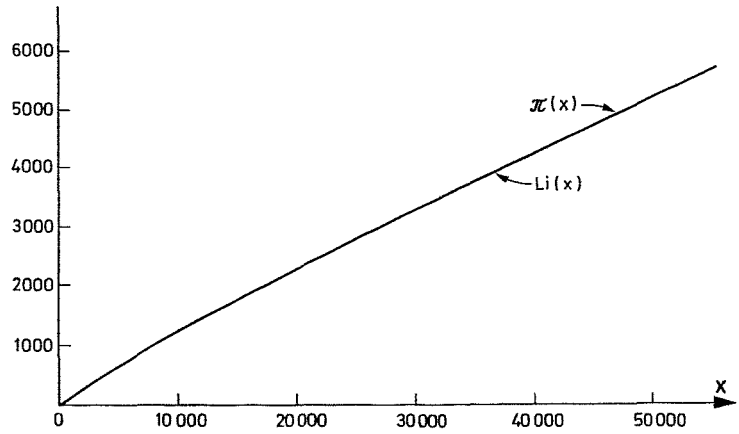

Fig. 4

Das Bild der Legendreschen Approximation brauche ich Ihnen dann nicht zu zeigen, denn sie stellt in diesem Bereich sogar eine noch bessere Annäherung zu $\pi(x)$ dar.

Es gibt noch eine Approximation, die ich erwähnen möchte. Die Untersuchungen von Riemann über Primzahlen suggerieren, daß die Wahrscheinlichkeit für eine große Zahl x, prim zu sein, noch genauer durch $1/\log x$ gegeben sein würde, wenn man nicht nur die Primzahlen, sondern auch noch die Primzahl*potenzen* mitzählte, wobei das Quadrat einer Primzahl als eine halbe Primzahl gezählt wird, die dritte Potenz einer Primzahl als eine Drittel-Primzahl usw. Dies führt zu der Approximation

$$\pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \cdots \cong \mathrm{Li}(x)$$

oder, wenn wir das umkehren, zu

$$\pi(x) \cong \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(\sqrt[3]{x}) - \cdots \quad [7]\,.$$

Wir bezeichnen die Funktion, die auf der rechten Seite dieser Formel steht, zu Ehren von Riemann mit $R(x)$. Sie stellt eine erstaunlich gute Approximation zu $\pi(x)$ dar, wie man aus den folgenden Werten sieht:

x	$\pi(x)$	$R(x)$
100 000 000	5 761 455	5 761 552
200 000 000	11 078 937	11 079 090
300 000 000	16 252 325	16 252 355
400 000 000	21 336 326	21 336 185
500 000 000	26 355 867	26 355 517
600 000 000	31 324 703	31 324 622
700 000 000	36 252 931	36 252 719
800 000 000	41 146 179	41 146 248
900 000 000	46 009 215	46 009 949
1 000 000 000	50 847 534	50 847 455

Für den Leser, der etwas Funktionentheorie kennt, darf ich vielleicht kurz erwähnen, daß $R(x)$ eine ganze Funktion von $\log x$ ist, gegeben durch die schnell konvergente Potenzreihe

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\zeta(n+1)} \frac{(\log x)^n}{n!},$$

wobei $\zeta(n+1)$ die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet [8].

Allerdings sei hier betont, daß die von Gauß und Legendre gegebenen Approximationen zu $\pi(x)$ nur empirische Feststellungen waren, und daß sogar Riemann, der doch durch theoretische Überlegungen zu seiner Funktion $R(x)$ geführt wurde, den Primzahlsatz nie bewiesen hat. Das haben erst 1896 Hadamard und (unabhängig) de la Vallée Poussin, auf Riemanns Untersuchungen aufbauend, getan.

Zu dem Thema der Voraussagbarkeit der Primzahlen möchte ich noch einige numerische Beispiele bringen. Wie schon gesagt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zahl von der Größenordnung x prim ist, ungefähr gleich $1/\log x$; das heißt, die Anzahl der Primzahlen in einem Intervall der Länge a um x soll ungefähr $a/\log x$ sein, mindestens dann, wenn das Intervall lang genug ist, um Statistik sinnvoll machen zu können, aber klein im Vergleich mit x. Zum Beispiel erwarten wir in dem Intervall zwischen 100 Millionen und 100 Millionen plus 150 000 ungefähr 8142 Primzahlen, da

$$\frac{150\,000}{\log(100\,000\,000)} = \frac{150\,000}{18{,}427\ldots} \approx 8142$$

ist. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei vorgegebene Zahlen in der Nähe von x beide prim sind, ungefähr $1/(\log x)^2$. Wenn man also fragt, wieviel Primzahlzwillinge (also wieviel Paare wie 11, 13 oder 59, 61 von Primzahlen, die sich um genau 2 unterscheiden) es in dem Intervall von x bis $x + a$ gibt, so erwartet man ungefähr $a/(\log x)^2$. In der Tat erwartet man ein bißchen mehr, da die Tatsache, daß n schon prim ist, die Chancen von $n + 2$, auch prim zu sein, etwas ändert – zum Beispiel

ist $n+2$ dann sicherlich ungerade. Ein leichtes heuristisches Argument [9] gibt $C[a/(\log x)^2]$ als die erwartete Anzahl der Primzahlzwillinge im Intervall $[x, x+a]$ an, wo C eine Konstante mit dem Wert ungefähr 1,3 ist (genauer: $C = 1{,}320\,323\,631\,6\ldots$). So sollten sich zwischen 100 Millionen und 100 Millionen 150 Tausend ungefähr $1{,}32\ldots \times 150\,000/(18{,}427)^2 \approx 584$ Paare von Primzahlzwillingen befinden. Ich habe hier die von den Herren Jones, Lal und Blundon [10] berechneten Daten für die wirklichen Anzahlen von Primzahlen und Zwillingen in diesem Intervall sowie in einigen gleich langen Intervallen um größere Zehnerpotenzen:

Intervall	Primzahlen		Primzahlzwillinge	
	erwartet	gefunden	erwartet	gefunden
100 000 000–				
100 150 000	8142	8154	584	601
1 000 000 000–				
1 000 150 000	7238	7242	461	466
10 000 000 000–				
10 000 150 000	6514	6511	374	389
100 000 000 000–				
100 000 150 000	5922	5974	309	276
1 000 000 000 000–				
1 000 000 150 000	5429	5433	259	276
10 000 000 000 000–				
10 000 000 150 000	5011	5065	211	208
100 000 000 000 000–				
100 000 000 150 000	4653	4643	191	186
1 000 000 000 000 000–				
1 000 000 000 150 000	4343	4251	166	161

Wie Sie sehen, ist die Übereinstimmung mit der Theorie sehr gut. Das ist besonders erstaunlich im Falle der Zwillinge, da man da nicht einmal beweisen kann, daß es überhaupt unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, geschweige denn, daß sie nach dem erwarteten Gesetz verteilt sind.

Zu dem Thema der Voraussagbarkeit der Primzahlen gebe ich ein letztes Beispiel, das Problem der *Lücken* zwischen den Primzahlen. Wenn man Primzahltabellen anguckt, so findet man manchmal besonders große Intervalle, wie das zwischen 113 und 127, die gar keine Primzahlen enthalten. Sei $g(x)$ die Länge des größten primzahlfreien Intervalls bis x (g soll an das englische Wort «gap» erinnern); zum Beispiel ist das längste solche Intervall bis 200 das eben erwähnte Intervall von 113 bis 127, also $g(200) = 14$. Die Zahl $g(x)$ wächst natürlich sehr unregelmäßig, aber ein heuristisches Argument deutet auf die asymptotische Formel

$$g(x) \sim (\log x)^2$$

hin [11]. Wie gut sogar die sehr stark schwankende Funktion $g(x)$ sich an das erwartete Benehmen hält, sehen Sie im folgenden Bild:

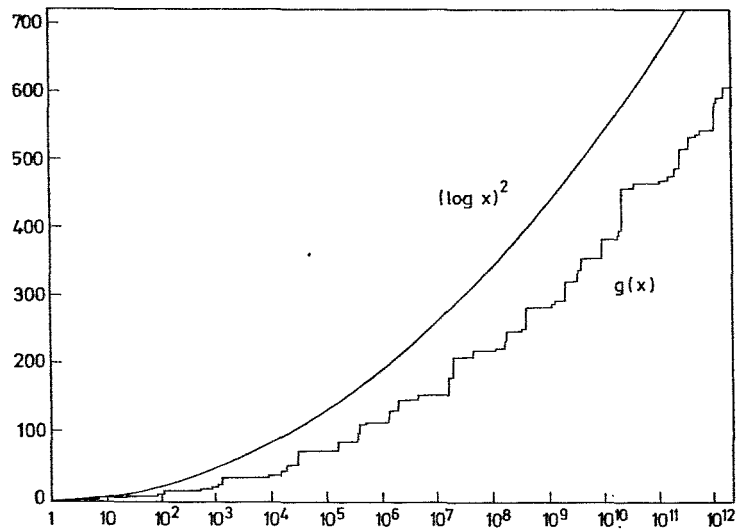

Fig. 5

Bisher habe ich meine Behauptung über die Ordnung, die bei den Primzahlen herrscht, viel eingehender belegt als meine Behauptung über ihre Willkür. Auch habe ich noch nicht das Versprechen meines Titels, Ihnen die ersten 50 Millionen Primzahlen zu zeigen, erfüllt, sondern Sie haben bisher nur Daten über einige Tausend Primzahlen gesehen. Hier ist also ein Graph von $\pi(x)$ im Vergleich mit den Approximationen von Legendre, Gauß und Riemann bis 10 Millionen [12]; da diese vier Funktionen so dicht aneinender sind, daß man ihre Graphen nicht unterscheiden könnte – wie ich Ihnen schon in dem Bild bis 50 000 gezeigt habe –, habe ich hier nur die Differenzen gezeichnet (siehe Fig. 6). Ich glaube, erst dieses Bild zeigt, worauf derjenige sich eingelassen hat, der sich entscheidet, die Primzahlen zu studieren.

Wie Sie sehen, ist die Legendresche Approximation $x/(\log x - 1{,}08366)$ für kleine x (bis zirka 1 Million) wesentlich besser als die Gaußsche $\mathrm{Li}(x)$, ab 5 Millionen ist aber $\mathrm{Li}(x)$ besser, und man kann zeigen, daß das bei wachsendem x immer mehr der Fall ist.

Bis 10 Millionen gibt es allerdings nur etwa 600 000 Primzahlen; um Ihnen die vollen 50 Millionen vorzustellen, muß ich nicht bis 10 Millionen, sondern bis 1 Milliarde gehen. Der Graph von $R(x) - \pi(x)$ in diesem Bereich sieht so aus, wie in Fig. 7 gezeigt [13]. Die Schwankungen der Funktion $\pi(x)$ werden immer größer, aber sogar bei diesen fast unvorstellbar großen Werten von x übertreffen sie nie ein paar Hundert.

Im Zusammenhang mit diesen Daten kann ich noch eine Tatsache über die Primzahlanzahl $\pi(x)$ erwähnen. Auf dem Bild bis 10 Millionen war die Gaußsche Approximation $\mathrm{Li}(x)$ immer *größer* als $\pi(x)$. Das bleibt der Fall bis 1 Milliarde, wie Sie auf dem folgenden Bild (in dem dieselben Daten wie vorher logarithmisch geplottet sind) sehen können (siehe Fig. 8).

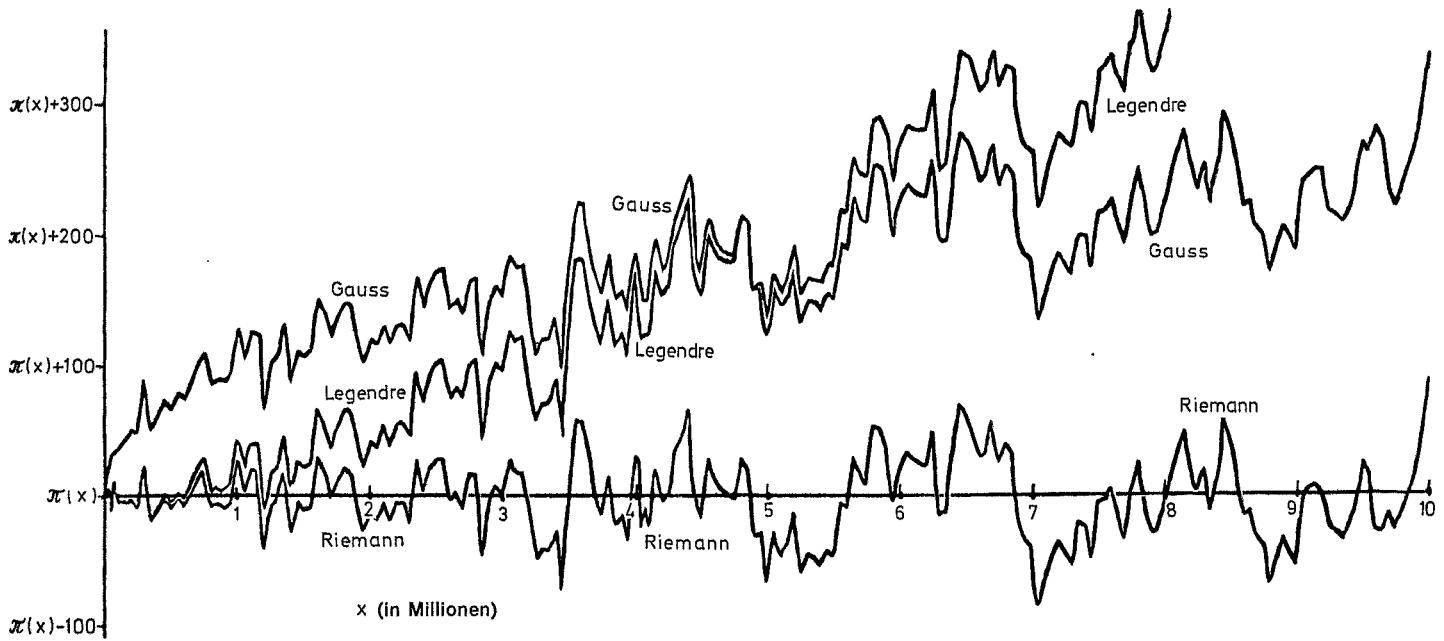
π(x)+300
π(x)+200
π(x)+100
π(x)
π(x)-100
Gauss
Legendre
Riemann
Gauss
Legendre
Riemann
Legendre
Gauss
Riemann
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x (in Millionen)

Fig. 6

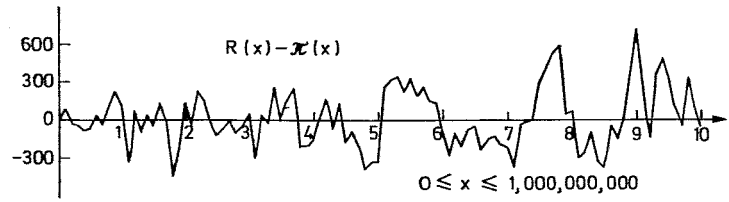

Fig. 7

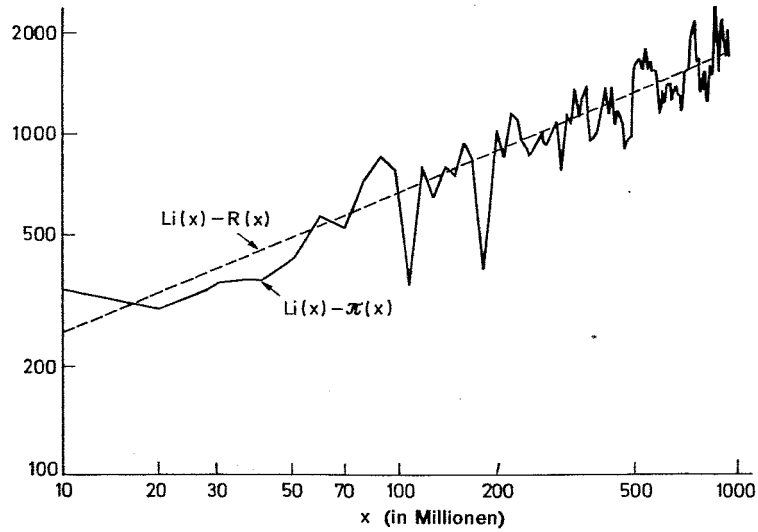

Fig. 8

Sicherlich gibt uns dieser Graph den Eindruck, daß die Differenz $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ mit wachsendem x unbeirrt nach Unendlich strebt, das heißt, daß das logarithmische Integral $\mathrm{Li}(x)$ grundsätzlich die Anzahl der Primzahlen bis x überschätzt (was mit der Feststellung, daß $R(x)$ eine bessere Approximation als $\mathrm{Li}(x)$ liefert, übereinstimmen würde, da $R(x)$ immer kleiner als $\mathrm{Li}(x)$ ist). Dies ist aber nicht der Fall: Man kann nämlich beweisen, daß es Punkte gibt, wo die Schwankungen von $\pi(x)$ so groß sind, daß $\pi(x)$ $\mathrm{Li}(x)$ übertrifft. Solche Zahlen hat man bisher nicht gefunden und wird man vielleicht nie finden, aber Littlewood hat gezeigt, daß sie existieren, und Skewes [14] sogar, daß es eine gibt, die kleiner als $(10^{10^{10^{34}}})$ ist. (Von dieser Zahl sagt Hardy, sie sei wohl die größte, die je in der Mathematik irgendwelchem besonderen Zweck gedient hat.) Jedenfalls zeigt dieses Beispiel, wie unklug es ist, aus numerischen Daten Schlüsse über die Primzahlen zu ziehen.

Ich möchte im letzten Teil meines Vortrags einige der theoretischen Ergebnisse über $\pi(x)$ erzählen, damit Sie nicht mit dem Gefühl weggehen, ausschließlich experimentelle Mathematik gesehen zu haben. Ein Uneingeweihter würde sicherlich meinen,

daß die Eigenschaft, prim zu sein, viel zu zufallsbedingt ist, um irgendetwas darüber beweisen zu können. Diese Ansicht wurde schon vor 2200 Jahren von Euklid widerlegt, indem er die Existenz von unendlich vielen Primzahlen zeigte. Sein Argument läßt sich in einem Satz formulieren: Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so könnte man sie zusammenmultiplizieren und 1 addieren, um eine Zahl zu erhalten, die durch gar keine Primzahl teilbar ist, und das ist unmöglich. Im 18. Jahrhundert hat Euler mehr bewiesen, nämlich, daß die Summe der Reziproken der Primzahlen divergent ist, also jede vorgegebene Zahl übertrifft. Sein ebenfalls sehr einfacher Beweis benutzt die Funktion

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,$$

deren Bedeutung für das Studium von $\pi(x)$ aber erst später durch die Arbeit von Riemann voll zur Geltung kommen sollte. In diesem Zusammenhang sei auch bemerkt, daß die Summe der Reziproken aller Primzahlen zwar unendlich ist, die Summe der Reziproken aller bekannten (also etwa der ersten 50 Millionen) kleiner als vier [15].

Erst 1850 konnte Tschebyscheff den ersten Ansatz zum Beweis des Primzahlsatzes machen [16]. Er zeigte, daß für hinreichend große x

$$0{,}89\,\frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1{,}11\,\frac{x}{\log x}$$

gilt, also daß der Primzahlsatz richtig ist mit einem relativen Fehler von höchstens 11%. Sein Beweis benutzt Binomialkoeffizienten und ist so schön, daß ich der Versuchung nicht widerstehen kann, eine vereinfachte Version davon anzudeuten (allerdings mit schlechteren Konstanten).

In der einen Richtung werden wir

$$\pi(x) < 1{,}7\,\frac{x}{\log x}$$

zeigen. Diese Ungleichung stimmt für $x < 1200$. Ich nehme induktiv an, sie sei für $x < n$ bewiesen und betrachte den mittleren Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n}$. Wegen

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \cdots + \binom{2n}{n} + \cdots + \binom{2n}{2n}$$

ist er sicherlich kleiner als 2^{2n}. Anderseits ist

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1)^2}.$$

Hier kommt jede Primzahl p, die kleiner als $2n$ ist, im Zähler vor, aber für p größer als n erscheint p sicherlich nicht im Nenner. Deswegen ist $\binom{2n}{n}$ durch jede Primzahl teilbar, die zwischen n und $2n$ liegt:

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \,\Big|\, \binom{2n}{n}.$$

Aber in dem Produkt sind $\pi(2n) - \pi(n)$ Faktoren, alle größer als n, also gilt

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} < 2^{2n}.$$

Wenn ich Logarithmen nehme, finde ich

$$\pi(2n) - \pi(n) < \frac{2n\log 2}{\log n} < 1{,}39\,\frac{n}{\log n}.$$

Induktiv ist aber der Satz für n richtig, also

$$\pi(n) < 1{,}7\,\frac{n}{\log n}\ ;$$

durch Addition dieser Beziehungen ergibt sich

$$\pi(2n) < 3{,}09\,\frac{n}{\log n} < 1{,}7\,\frac{2n}{\log(2n)} \qquad (n > 1200),$$

also gilt der Satz auch für $2n$. Wegen

$$\pi(2n+1) \leq \pi(2n) + 1 < 3{,}09\,\frac{n}{\log n} + 1 < 1{,}7\,\frac{2n+1}{\log(2n+1)} \qquad (n > 1200)$$

gilt er auch für $2n+1$, und der Induktionsschritt ist fertig.

Für die Abschätzung in der anderen Richtung braucht man ein einfaches Lemma, das man mit Hilfe einer wohlbekannten Formel für die Potenz von p, die in $n!$ aufgeht, leicht beweisen kann [17]:

LEMMA: *Sei p eine Primzahl. Ist p^{ν_p} die größte Potenz von p, die in $\binom{n}{k}$ aufgeht, so ist*

$$p^{\nu_p} \leq n.$$

KOROLLAR: *Für jeden Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \prod_{p\leq n} p^{\nu_p} \leq n^{\pi(n)}.$$

Wenn ich die Aussage des Korollars für alle Binomialkoeffizienten mit gegebenem n hinschreibe und diese Ungleichungen aufaddiere, so finde ich

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leq (n+1)\cdot n^{\pi(n)},$$

und der Logarithmus hiervon liefert

$$\pi(n) \geq \frac{n\log 2}{\log n} - \frac{\log(n+1)}{\log n}$$

$$> \frac{2}{3}\,\frac{n}{\log n} \qquad (n > 200).$$

Zum Schluß möchte ich ein paar Worte über Riemanns Arbeit sagen. Riemann hat zwar nicht den Primzahlsatz bewiesen, dafür aber etwas viel Verblüffenderes gemacht, nämlich eine *genaue* Formel für $\pi(x)$ gegeben. Diese Formel hat die Gestalt

$$\pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}(\pi\sqrt[3]{x}) + \cdots = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\varrho} \mathrm{Li}(x^{\varrho}) ,$$

wobei die Summe über die Wurzeln der Zetafunktion $\zeta(s)$ läuft [18]. Diese sind (mit Ausnahme der sogenannten «trivialen Wurzeln» $\varrho = -2, -4, -6, \ldots$, die einen vernachlässigbaren Beitrag liefern) komplexe Zahlen mit Realteil zwischen 0 und 1, wovon die ersten 10 folgende Werte haben [19]:

$$\varrho_1 = \frac{1}{2} + 14{,}134725\, i\,, \quad \bar{\varrho}_1 = \frac{1}{2} - 14{,}134725\, i\,,$$

$$\varrho_2 = \frac{1}{2} + 21{,}022040\, i\,, \quad \bar{\varrho}_2 = \frac{1}{2} - 21{,}022040\, i\,,$$

$$\varrho_3 = \frac{1}{2} + 25{,}010856\, i\,, \quad \bar{\varrho}_3 = \frac{1}{2} - 25{,}010856\, i\,,$$

$$\varrho_4 = \frac{1}{2} + 30{,}424878\, i\,, \quad \bar{\varrho}_4 = \frac{1}{2} - 30{,}424878\, i\,,$$

$$\varrho_5 = \frac{1}{2} + 32{,}935057\, i\,, \quad \bar{\varrho}_5 = \frac{1}{2} - 32{,}935057\, i\,.$$

Daß mit einer Wurzel immer auch die komplex Konjugierte auftritt, ist leicht zu zeigen. Daß aber jeweils der reelle Teil der Wurzel genau gleich 1/2 ist, ist noch unbewiesen; dies ist die berühmte Riemannsche Vermutung, die für die Primzahltheorie äußerst wichtige Folgen hätte [20]. Man hat sie für 7 Millionen Wurzeln verifiziert.

Die Riemannsche Formel kann mit Hilfe der oben eingeführten Riemannschen Funktion $R(x)$ in der Gestalt

$$\pi(x) = R(x) - \sum_{\varrho} R(x^{\varrho})$$

geschrieben werden; sie liefert also als k-te Approximation zu $\pi(x)$ die Funktion

$$R_k(x) = R(x) + T_1(x) + T_2(x) + \cdots + T_k(x) ,$$

wobei $T_n(x) = -R(x^{\varrho_n}) - R(x^{\bar{\varrho}_n})$ der Beitrag des n-ten Wurzelpaares der Zetafunktion ist. Für jedes n ist $T_n(x)$ eine glatte, oszillierende Funktion von x; für die ersten Werte von n sieht sie so aus wie in Fig. 9 abgebildet [21]. Somit ist auch $R_k(x)$ für jedes k eine glatte Funktion. Bei wachsendem k nähern sich diese Funktionen $\pi(x)$. Hier sind zum Beispiel die Graphen der 10. und der 29. Approximationen (siehe Fig. 10 und 11) – und wenn man diese Kurven mit dem Graph von $\pi(x)$ bis 100 (S. 4) vergleicht, ergibt sich das in Fig. 12 gezeigte Bild.

Ich hoffe, daß ich Ihnen mit diesem und den anderen Bildern einen gewissen Eindruck vermittelt habe von der großen Schönheit der Primzahlen und von den endlosen Überraschungen, die sie für uns bereithalten.

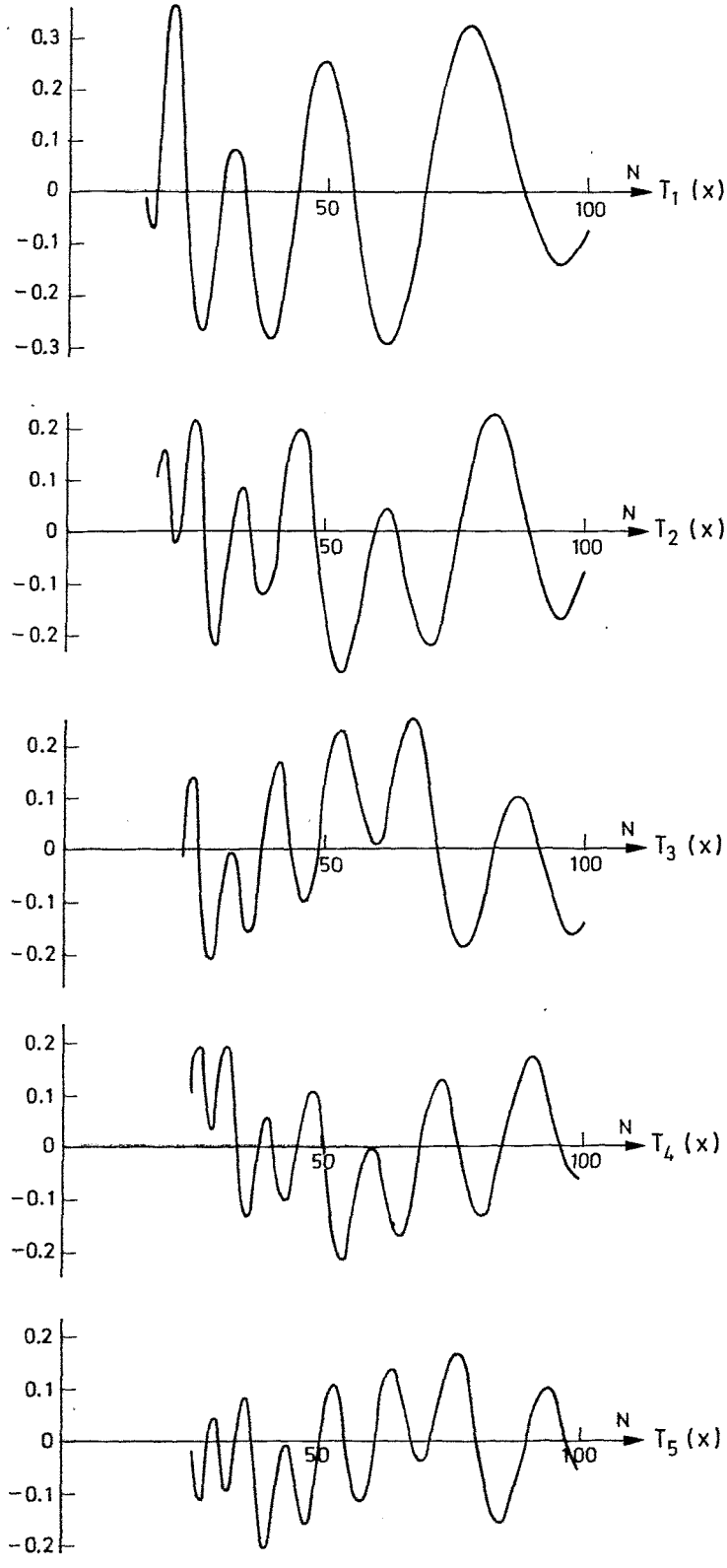
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
50
100
N
T_1 (x)
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
50
100
N
T_2 (x)
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
50
100
N
T_3 (x)
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
50
100
N
T_4 (x)
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
50
100
N
T_5 (x)

Fig. 9

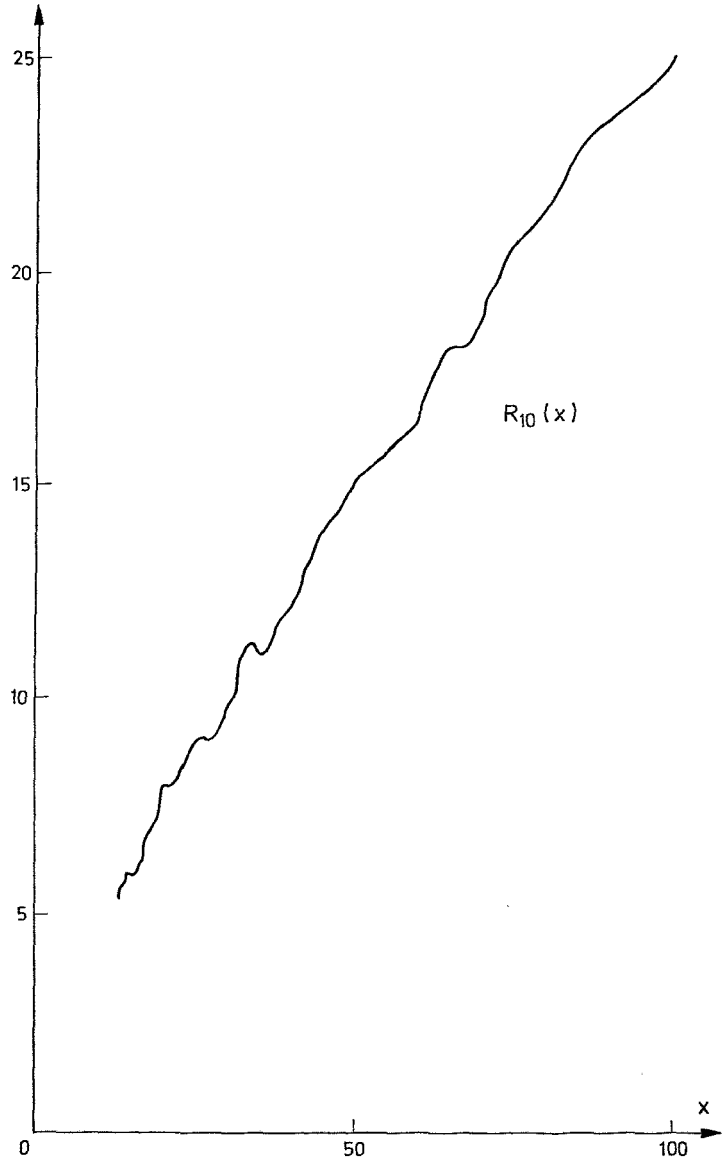

Fig. 10

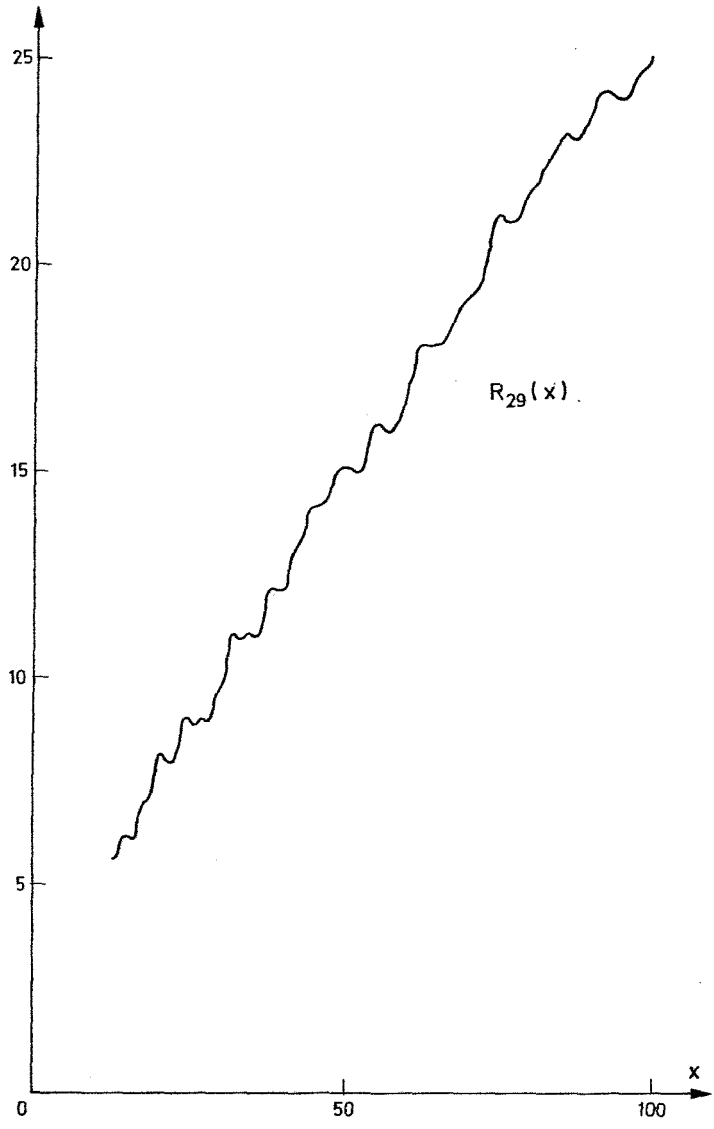

Fig. 11

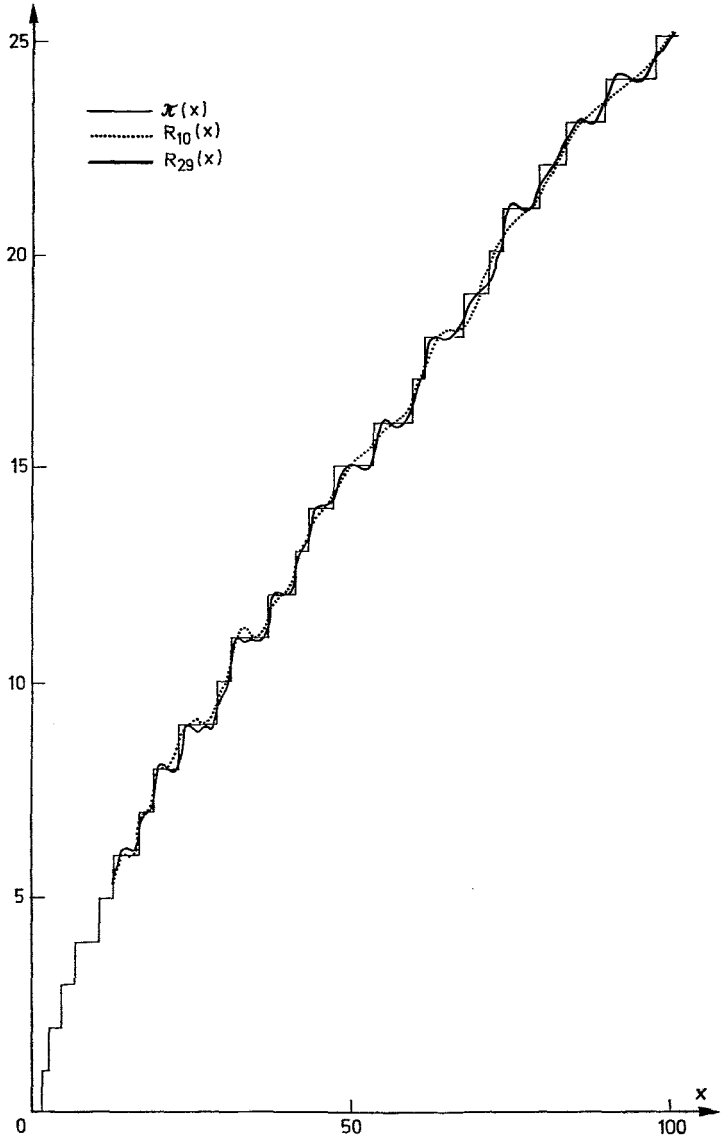

Fig. 12

ANMERKUNGEN

[1] J. M. Gandhi, Formulae for the n-th prime, Proc. Washington State Univ. Conf. on Number Theory, Washington State Univ., Pullman, Wash., 1971, 96–106.

[2] J. P. Jones, Diophantine representation of the set of prime numbers, Notices of the AMS 22 (1975), A-326.

[3] Es gibt einen guten Grund dafür, daß so viele Zahlen auf dieser Liste von der Gestalt $M_k = 2^k - 1$ sind: Ein auf Lucas zurückgehender Satz besagt, daß M_k ($k \geq 2$) genau dann prim ist, wenn M_k in L_{k-1} aufgeht, wo die Zahlen L_n induktiv durch $L_1 = 4$, $L_{n+1} = L_n^2 - 2$ (also $L_2 = 14$, $L_3 = 194$, $L_4 = 37634, \ldots$) definiert werden, und damit kann man die Primalität von M_k sehr viel schneller testen als für eine andere Zahl derselben Größenordnung möglich wäre.

Die Primzahlen der Gestalt $2^k - 1$ (k muß dann notwendigerweise selber prim sein) heißen Mersennesche Primzahlen (nach dem französischen Mathematiker Mersenne, der im Jahre 1644 eine größtenteils richtige Liste aller solchen Primzahlen, $< 10^{79}$ angegeben hat) und spielen im Zusammenhang mit einem ganz anderen Problem der Zahlentheorie eine Rolle. Euklid hat entdeckt, daß die Zahlen $2^{p-1}(2^p - 1)$, wenn $2^p - 1$ prim ist, «vollkommen», das heißt gleich der Summe ihrer echten Teiler sind (z. B. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$), und Euler zeigte, daß *alle* geraden vollkommenen Zahlen diese Gestalt haben. Es ist unbekannt, ob es auch ungerade vollkommene Zahlen gibt; sie müßten jedenfalls $> 10^{100}$ sein. Es gibt genau 24 Werte von $p < 20000$, für die $2^p - 1$ prim ist.

[4] C. F. Gauß, Werke, II (1872), 444–447. Für eine Diskussion der Geschichte der verschiedenen Approximationen zu $\pi(x)$, wo auch dieser Brief (in englischer Übersetzung) abgedruckt wird, siehe L. J. Goldstein, A history of the prime number theorem, Amer. Math. Monthly 80 (1973), 599–615.

[5] A. M. Legendre, Essai sur la théorie de Nombres, 2. Auflage, Paris, 1808, S. 394.

[6] Genauer gesagt, gilt

$$\mathrm{Ls}(x) - 1{,}5 < \mathrm{Li}(x) < \mathrm{Ls}(x),$$

das heißt, die Differenz zwischen $\mathrm{Li}(x)$ und $\mathrm{Ls}(x)$ ist beschränkt. Wir erwähnen auch, daß das logarithmische Integral häufig als der Cauchy Hauptwert

$$\mathrm{Li}(x) = \mathrm{H.W.} \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t} \right)$$

definiert wird; diese Definition unterscheidet sich aber von der im Text angegebenen auch nur um eine Konstante.

[7] Das Bildungsgesetz der Koeffizienten ist wie folgt: der Koeffizient von $\mathrm{Li}(\sqrt[n]{x})$ ist gleich $+ 1/n$, falls n das Produkt einer geraden Anzahl verschiedener Primzahlen ist, gleich $- 1/n$, falls n das Produkt einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen ist, und gleich 0, falls n mehrfache Primfaktoren enthält.

[8] Andere Darstellungen dieser Funktion sind

$$R(x) = \int_0^\infty \frac{(\log x)^t \, dt}{t \, \Gamma(t+1) \, \zeta(t+1)}$$

($\zeta(s)$ = Riemannsche Zetafunktion, $\Gamma(s)$ = Gammafunktion) und

$$R(e^{2\pi x}) \doteqdot \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2}{B_2} x + \frac{4}{3 B_4} x^3 + \frac{6}{5 B_6} x^5 + \ldots \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ 12 x + 40 x^3 + \frac{252}{5} x^5 + \cdots \right\}$$

(B_k = k-te Bernoulli-Zahl; $\doteqdot$ bedeutet, daß die Differenz der beiden Seiten mit wachsendem x nach 0 strebt), die beide von Ramanujan stammen. Vgl. H. G. Hardy, Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work, Cambridge University Press, 1940, Kap. 2.

[9] Nämlich: Für ein Paar (m, n) von zufällig gewählten Zahlen ist die Wahrscheinlichkeit, daß m und n beide $\not\equiv 0 \pmod p$ sind, offensichtlich gleich $((p-1)/p)^2$, während für eine zufällig gewählte Zahl n die Wahrscheinlichkeit, daß n und $n+2$ beide $\not\equiv 0 \pmod p$ sind, gleich $1/2$ für $p = 2$ und gleich $(p-2)/p$ für $p \neq 2$ ist. Somit unterscheidet sich die Wahrscheinlichkeit für n und $n+2$, modulo p ein Paar von Primzahlkandidaten darzustellen, um einen Faktor $((p-2)/p)\,(p^2/(p-1)^2)$ für $p \neq 2$ bzw. 2 für $p = 2$ von der entsprechenden Wahrscheinlichkeit für zwei unabhängige Zahlen m und n. Wir haben also insgesamt unsere Chancen um einen Faktor

$$C = 2 \prod_{\substack{p>2 \\ p \text{ prim}}} \frac{p^2 - 2p}{p^2 - 2p + 1} = 1{,}32032\ldots$$

verbessert. Für eine etwas sorgfältigere Durchführung dieses Arguments siehe G. H. Hardy und E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Clarendon Press, Oxford, 1960, § 22.20 (S. 371–373).

[10] M. F. Jones, M. Lal und W. J. Blundon, Statistics on certain large primes, Math. Comp. *21* (1967), 103–107.

[11] D. Shanks, On maximal gaps between successive primes, Math. Comp. 18 (1964), 646–651. Der Graph von $g(x)$ wurde anhand der Tabellen aus folgenden Arbeiten gemacht: L. J. Lander und T. R. Parkin, On first appearance of prime differences, Math. Comp. *21* (1967), 483–488; R. P. Brent, The first occurrence of large gaps between successive primes, Math. Comp. *27* (1973), 959–963.

[12] Die Daten in diesem Graph sind aus Lehmers Primzahltabelle entnommen worden (D. N. Lehmer, List of Prime Numbers from 1 to 10006721, Hafner Publishing Co., New York, 1956).

[13] Dieser und der folgende Graph wurden anhand der Werte von $\pi(x)$ gemacht, die in D. C. Mapes, Fast method for computing the number of primes less than a given limit, Math. Comp. *17* (1963), 179–185, angegeben werden. Im Gegensatz zu den im vorgehenden Graph benutzten Daten von Lehmer wurden diese Werte mit Hilfe einer Formel für $\pi(x)$ errechnet und nicht durch Aufzählen der Primzahlen bis x.

[14] S. Skewes, On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ (I), J. Lond. Math. Soc. *8* (1933), 277–283. Diese Abschätzung hat Skewes zunächst unter Annahme der unten besprochenen Riemannschen Vermutung bewiesen; zweiundzwanzig Jahre später (On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ (II), Proc. Lond. Math. Soc. (3) *5* (1955), 48–70) hat er ohne Hypothese gezeigt, daß es ein x unterhalb der (noch viel größeren) Schranke $10^{10^{10^{964}}}$ gibt mit $\pi(x) > \mathrm{Li}(x)$. Diese Schranke ist von Cohen und Mayhew auf $10^{10^{529{,}7}}$ und von Lehman (On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$, Acta Arithm. *11* (1966), 397–410) auf $1{,}65 \times 10^{1165}$ herabgesetzt worden. Lehman zeigte sogar, daß es zwischen $1{,}53 \times 10^{1165}$ und $1{,}65 \times 10^{1165}$ ein Intervall von mindestens 10^{500} Zahlen gibt, wo $\pi(x)$ größer ist als $\mathrm{Li}(x)$; seiner Untersuchung zufolge gibt es wahrscheinlich eine Zahl x in der Nähe von $6{,}663 \times 10^{370}$ mit $\pi(x) > \mathrm{Li}(x)$ und keine Zahl unterhalb 10^{20} mit dieser Eigenschaft.

[15] Es gilt nämlich (wie Gauß 1796 vermutete und Mertens 1874 bewies)

$$\sum_{p<x} \frac{1}{p} = \log\log x + C + \varepsilon(x)\,,$$

wo $\varepsilon(x) \to 0$ für $x \to \infty$ und $C \approx 0{,}261\,497$ eine Konstante ist. Dieser Ausdruck ist für $x = 10^9$ kleiner als 3,3 und sogar für $x = 10^{18}$ noch unterhalb 4.

[16] P. L. Tschebyscheff, Recherches nouvelles sur les nombres premiers, Paris 1851, CR Paris *29* (1849), 397–401, 738–739. Für eine moderne Darstellung auf Deutsch des Tschebyscheffschen Beweises siehe W. Schwarz, Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie, BI-Hochschul-Taschenbuch 278/278a, Mannheim 1969, Kap. II.4, S. 42–48.

[17] Die größte Potenz von p, die $n!$ teilt, ist $p^{[n:p]+[n:p^2]+\cdots}$, wo $[x]$ den ganzzahligen Teil von x bezeichnet; somit ist in der Bezeichnung des Lemmas

$$v_p = \sum_{r \geq 1} \left\{ \left[\frac{n}{p^r}\right] - \left[\frac{k}{p^r}\right] - \left[\frac{n-k}{p^r}\right] \right\}.$$

In dieser Summe ist jeder Summand gleich 0 oder 1, und sicherlich gleich 0 für

$$r > \frac{\log n}{\log p}$$

(da dann $[n/p^r] = 0$ ist), also ist

$$\nu_p \leq \left[\frac{\log n}{\log p}\right]$$

und die Behauptung folgt.

[18] Die oben angegebene Definition von $\zeta(s)$ als

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

hat nur da einen Sinn, wo s eine komplexe Zahl mit Realteil größer als 1 ist (da die Reihe nur dort konvergiert), und in diesem Bereich hat $\zeta(s)$ keine Nullstellen. Die Funktion $\zeta(s)$ läßt sich aber für alle komplexen Zahlen s definieren, so daß es einen Sinn hat, von ihren Wurzeln in der komplexen Ebene zu sprechen. Die Erweiterung des Definitionsbereichs von $\zeta(s)$ auf die Halbebene $Re(s) > 0$ bekommt man am einfachsten, wenn man die für $Re(s) > 1$ gültige Identität

$$(1 - 2^{1-s})\,\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

benutzt und bemerkt, daß die rechtsstehende Reihe für alle s mit positivem Realteil konvergiert. Somit lassen sich die »interessanten« Wurzeln der Zetafunktion, nämlich die Wurzeln $\varrho = \beta + i\,\gamma$ mit $0 < \beta < 1$ elementar durch die beiden Gleichungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \cos(\gamma \log n) = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} \sin(\gamma \log n) = 0$$

charakterisieren.

Die Summe über die Wurzeln ϱ in der Riemannschen Formel ist nicht absolut konvergent und muß passend vorgenommen werden [nach wachsendem Absolutbetrag von $\mathrm{Im}(\varrho)$].

Schließlich bemerken wir, daß die genaue Formel für $\pi(x)$ schon 1859 von Riemann aufgestellt wurde, erst aber 1895 von von Mangoldt bewiesen.

[19] Diese Wurzeln wurden schon 1903 von Gram berechnet (J.-P. Gram, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Acta Math. *27* (1903), 289–304). Für eine sehr schöne Darstellung der Theorie der Riemannschen Zetafunktion und der Methoden zur Berechnung ihrer Nullstellen siehe H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Academic Press, New York, 1974.

[20] Nämlich die Riemannsche Vermutung impliziert (und ist sogar damit äquivalent), daß der Fehler in der Gaußschen Approximation $\mathrm{Li}(x)$ zu $\pi(x)$ höchstens gleich einer Konstanten mal $x^{1/2} \log x$ ist, während man gegenwärtig nicht einmal weiß, ob dieser Fehler kleiner als x^c für irgendein $c < 1$ ist.

[21] Dieser Graph sowie die drei folgenden sind aus der Arbeit von H. Riesel und G. Göhl, Some calculations related to Riemann's prime number formula, Math. Comp. *24* (1970), 969–983, entnommen worden.