Übung 6

Die Wellengleichung (=partielle Differentialgleichung)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

soll numerisch gelöst werden. Wir betrachten feste Randbedingungen $u(0) = u(L) = 0$ (eingespannte Saite) und Anfangsbedingungen $u(x) = f(x)$, $\dot{u}(x) = 0$, wobei $f(x)$ frei gewählt werden kann (z.B. Dreieck, ...).

Zur numerischen Lösung gehen wir von der Diskretisierung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = [u(t+\Delta t) - 2u(t) + u(t-\Delta t)]/(\Delta t)^2$$

und der analogen Gleichung für x aus. Einsetzen in die Wellengleichung und einfache Umsortierung liefert:

$$u(x, t+\Delta t) = v^2 (\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 [u(x+\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x - \Delta x, t)] + 2u(x,t) - u(x, t-\Delta t)$$

Die x-Ableitung kann als Matrix-Vektor-Produkt geschrieben werden. Die gesamte Gleichung ist eine Vorschrift, wie man aus den Vektoren $u(t)$ und $u(t-\Delta t)$ den Vektor $u(t+\Delta t)$ berechnet. Durch wiederholte Anwendung kann man sukzessive die Matrix der Werte $u(x_i,\ t_j)$ auf einem Gitter x_i, t_j aufbauen.

- Implementieren Sie dieses Verfahren mit Octave. Neben den verschiedenen Möglichkeiten, auf Teile von Matrizen und Vektoren zuzugreifen, sind folgende Funktionen hilfreich: `diag(), ones(), zeros(), horzcat(), vertcat(), for ... endfor, mesh()`
- Spielen Sie mit verschiedenen Anfangsbedingungen $f(x)$
- Was passiert, falls $v^2(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 > 1$?