COLIMITS UP TO HOMOTOPY / KOLIMITEN BIS AUF HOMOTOPIE

BETREUERIN: DR. VIKTORIYA OZORNOVA

Ein wichtiges Beispiel von Kolimiten in Topologie ist ein Pushout. Typischerweise ist das eine Verklebekonstruktion, etwa das Ankleben von Zellen an einen topologischen Raum X ist ein Pushout, wie beispielsweise:

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ D^3 \arrow[r] & X \coprod_{S^2} D^3 \end{tikzcd}$$

Ein weiteres Beispiel ist etwa die Quotiententopologie, wo sich das Zusammenschlagen von einem Unterraum A eines topologischen Raums X als das Pushout

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ * \arrow[r] & X/A \end{tikzcd}$$

auffassen lässt.

Nun ist es für viele Zwecke viel einfacher, Räume bis auf Homotopieäquivalenzen (oder genauer: bis auf schwache Homotopieäquivalenzen) zu betrachten. Anstelle der Kategorie von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen kann man die sogenannte *Homotopiekategorie der topologischen Räume* betrachten, in der Objekte topologische Räume bis auf (schwache) Homotopieäquivalenz sind, und die Morphismen nun „Homotopieklassen von stetigen Abbildungen" sind, wobei dies natürlich genauer gefasst werden muss.

Während durch die Identifikation von homotopieäquivalenten Räumen Einiges vereinfacht wird, geht uns auch Einiges verloren: Erstes Ziel der Bachelorarbeit ist es einzusehen, dass nun nicht alle Pushouts in dieser Kategorie existieren, selbst von einem so einfachen Diagramm wie dem unteren, wie in [Mal14] gezeigt wird:

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[d] & S^2 \arrow[d, dashed] \\ S^2 \arrow[r, dashed] & S^2 \vee S^2 \end{tikzcd}$$

(In den topologischen Räumen wäre natürlich, wie im Diagramm angedeutet, der Raum $S^2 \vee S^2$ das Pushout.)

An dieser Stelle gibt es einige Möglichkeiten für die weitere Gestaltung der Bachelorarbeit: Das Problem kann nämlich im gewissen Rahmen mit Hilfe von Homotopie-Pushouts gelöst werden. Diese könnte man konkret konstruieren und eine schwache universelle Eigenschaft für diese beweisen (dual zu [Mat76]). Alternativ könnte man auch allgemeinere Konstruktionen von Homotopie-Pushouts anschauen; falls die Diskussion soweit sich als gut zugänglich erweisen sollte, kann das im Kontext der Modellkategorien (und insbesondere der Quillen-Modellstruktur auf topologischen Räumen) geschehen.

Die ersten Literaturquellen finden Sie nachstehend, aber genauere Literatur wird im Laufe der Bearbeitungszeit festgelegt.

Literatur

[Dug08] Daniel Dugger, *A primer on homotopy colimits*, available at `https://pages.uoregon.edu/ddugger/hocolim.pdf`, 2008.

[Mal14] Cary Malkiewich, *Pushouts in the homotopy category do not exist*, available at `https://people.math.binghamton.edu/malkiewich/no_pushout.pdf`, 2014.

[Mat76] Michael Mather, *Pull-backs in homotopy theory*, Canadian J. Math. **28** (1976), no. 2, 225–263. MR 402694

[Vog73] R. M. Vogt, *Homotopy limits and colimits*, Proceedings of the International Symposium on Topology and its Applications (Budva, 1972), 1973, pp. 235–241. MR 0334197