ÜBER GESCHLOSSENE GEODÄTISCHE

Habilitationsschrift

zur

Erlangung der venia legendi

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn

vorgelegt von

Werner Ballmann

Bonn 1983

INHALTSVERZEICHNIS

TEIL I. GESCHLOSSENE GEODÄTISCHE AUF MANNIGFALTIGKEITEN MIT UNENDLICHER FUNDAMENTALGRUPPE

In dieser Arbeit diskutieren wir Abschätzungen für das asymptotische Verhalten der Funktion N, die die geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen auf einer gegebenen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit V nach ihrer Länge zählt. Unser prinzipielles Hilfsmittel ist die Morse-Theorie auf dem freien Schleifenraum $\Lambda = \Lambda(V)$.

In jeder freien Homotopieklasse von geschlossenen Kurven gibt es kürzeste Kurven, und diese sind bis auf ihre Parametrisierung geschlossene Geodätische. Hieraus folgt aber nicht, daß man N durch das Wachstum der Fundamentalgruppe Γ von V abschätzen kann. Freie Homotopieklassen entsprechen nämlich nicht den Elementen aus Γ, sondern deren Konjugationsklassen. Man kann also beispielsweise nicht folgern, daß N exponentiell wächst falls Γ exponentiell wächst. Die freie Homotopieklasse einer Schleife ist aber andererseits in der Homologieklasse der Schleife enthalten. Damit folgt eine Abschätzung für N mit der ersten Bettischen Zahl $b_1 = b_1(V)$:

$$\liminf_{t \to \infty} N(t)/t^k > 0 \quad \text{falls} \quad b_1 = k \geq 2$$

Dies folgt, weil die "primen" Elemente in Z^k polynomial vom Grade k wachsen (vergleiche Lemma (1.1) im ersten Abschnitt).

In [Gl] erhielt M. Gromov mehrere Abschätzungen für N:

Falls V homöomorph ist zu $S^1 \times V_0$, wobei V_0 eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist, so gilt

$$\liminf_{t \to \infty} N(t)/\ln(t) > 0$$

Falls darüberhinaus V_0 eine Liegruppe ist, so folgt

$$\limsup_{t \to \infty} N(t)/t^2 > 0$$

Unser erster Satz ist eine Verallgemeinerung dieser Resultate.

Satz 1. Sei V homöomorph zu $S^1 \times V_0$, wobei V_0 eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist. Dann gilt

$$\liminf_{t \to \infty} N(t)\ln(t)/t^2 > 0 \quad \text{und} \quad \limsup_{t \to \infty} N(t)/t^2 > 0$$

Für eine Untergruppe Z der Fundamentalgruppe Γ von V sei $N^Z(t)$ die Anzahl der geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen c auf V mit Länge $L(c) \leq t$, so daß die freie Homotopieklasse von c einem Element aus $Z-\{e\}$ entspricht. Als weiteres Resultat erhält M. Gromov in [G1]

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)/t > 0$$

falls Γ nilpotent und nicht Abelsch ist und falls $Z \subset [\Gamma,\Gamma]$ unendlich zyklisch ist. Wir erhalten eine schwächere Abschätzung in einem allgemeineren Fall.

Satz 2. Die Fundamentalgruppe Γ von V sei fast nilpotent und nicht unendlich zyklisch. Falls Z eine unendlich zyklische Untergruppe von Γ ist, so gilt

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t > 0$$

V. Bangert und N. Hingston bewiesen kürzlich [BH], daß diese Abschätzung auch im Falle $\Gamma = \mathbb{Z}$ gilt. Die Voraussetzung in Satz 2, daß Γ nicht unendlich zyklisch ist, ist also überflüssig wenn man ihr Resultat mitbenützt.

Eine andere interessante Ergänzung zu Satz 2 ist das folgende Resultat aus [BTZ]: Falls $Z \neq \{e\}$ eine endliche zyklische Untergruppe von Γ ist, so gilt

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t > 0$$

falls die Metrik auf V eine generische Bedingung erfüllt (vergleiche (2.9) im zweiten Abschnitt).

Im ersten Abschnitt beweisen wir Satz 1. Ein wichtiges Hilfsmittel ist der Satz von Sullivan [Su], daß es in $\Lambda(V_0)$ eine arithmetische Folge nicht verschwindender rationaler Homologieklassen gibt.

Im zweiten Abschnitt erhalten wir eine allgemeine Abschätzung . Die Resultate verallgemeinern teilweise die Resultate von V.Bangert-N.Hingston [BH] und M.Tanaka [T], sind jedoch unabhängig entstanden.

Im dritten Abschnitt beweisen wir Satz 2 und diskutieren einige weitere Abschätzungen.

Es ist offensichtlich, daß wir Ergebnisse über die Verteilung der Primzahlen benützen. Als generelle Referenz hierfür ist jedes Buch über die elementare analytische Zahlentheorie geeignet, etwa [A]. Ohne Referenz benützen wir elementare Ergebnisse aus der Theorie der geschlossenen Geodätischen. Man findet diese ohne weiteres in den ersten Kapiteln von [K].

Wir möchten uns bei E. Calabi, M. Gromov, St. Halperin und W. Ziller für anregende und hilfreiche Diskussionen bedanken. Eine Bemerkung N.Hingstons bewahrte uns vor einer unrichtigen Annahme in Satz (1.4). Dafür sind wir ihr zu Dank verpflichtet.

Abschnitt 1. Der Beweis des ersten Satzes

Für eine Teilmenge $G \subset \Pi(V) = \Lambda(V)/O(2)$, die aus geschlossenen Geodätischen besteht, setzen wir

$$M^G(t) = |\{c \in G \mid L(c) \leq t\}|$$

Mit $N^G(t)$ bezeichnen wir die Anzahl der geometrisch verschiedenen c aus G mit $L(c) \leq t$. Es ist im allgemeinen nicht richtig, daß N^G die primen geschlossenen Geodätischen aus G zählt. Dieses gilt jedoch unter der zusätzlichen Bedingung, daß G mit c auch die c unterliegende prime geschlossene Geodätische enthält. Wir nennen G <u>vollständig</u>, falls G diese Eigenschaft besitzt.

Auf den folgenden Hilfssatz machte uns M. Gromov in einem Brief aufmerksam.

<u>1.1 Lemma.</u> G sei vollständig. Sei $\alpha > 1$ und $b = \limsup_{t \to \infty} N^G(t)/t^\alpha$. Dann gilt

$$\limsup_{t \to \infty} M^G(t)/t^\alpha \leq c(\alpha)b$$

Sei außerdem $a = \liminf_{t \to \infty} N^G(t)/t^\alpha$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$A = \liminf_{t \to \infty} M^G(t)/t^\alpha \leq c(\alpha,\varepsilon)a + \varepsilon b$$

Insbesondere folgt also $a > 0$ falls $A > 0$ und $b < \infty$.

<u>Beweis.</u> Wie wir schon oben bemerkten ist $N^G(t)$ gleich der Anzahl der primen geschlossenen Geodätischen in G der Länge $\leq t$. Es folgt

$$M^G(t) \leq (N^G(t) - N^G(t/2)) + 2(N^G(t/2) - N^G(t/3)) + \ldots$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} N^G(t/i)$$

Die Summe auf der rechten Seite enthält natürlich nur endlich viele nicht triviale Summanden, denn es gibt auf V keine beliebig kurzen geschlossenen Geodätischen.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b < \infty$ annehmen. Für jedes $\delta > 0$ gibt es dann ein $T = T(\delta)$, so daß

$$N^G(t) < (b+\delta)t^\alpha \quad \text{für alle} \quad t > T$$

Also folgt für alle $t > T$

$$M^G(t) < (b+\delta) \sum_{i=1}^{\infty} (t/i)^\alpha + \frac{t}{T} M^G(T)$$
$$= (b+\delta)t^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^\alpha + \text{const.}t$$

Weil $\alpha > 1$ ist folgt die erste Ungleichung des Lemmas mit der Konstanten $c(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^\alpha$.

Zum Beweis der zweiten Ungleichung wähle B und $I < J$, so daß

$$N^G(t) < Bt^\alpha \quad \text{für alle} \quad t > 0$$
$$\sum_{i=I}^{\infty} 1/i^\alpha < \varepsilon \quad \text{und} \quad \sum_{i=J}^{\infty} 1/i^\alpha < \delta$$

Da N^G monoton wachsend ist, erhalten wir für alle $t > JT$

$$M^G(t) < N^G(t) + N^G(t/2) + \ldots + N^G(t/I) + \sum_{i=I}^{\infty} N^G(t/i)$$
$$< IN^G(t) + \sum_{i=I}^{J} N^G(t/i) + \sum_{i=J}^{\infty} N^G(t/i)$$
$$< IN^G(t) + \varepsilon bt^\alpha + \delta Bt^\alpha$$

Weil $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt die zweite Ungleichung des Lemmas mit $c(\alpha, \varepsilon) = I$. QED

Für eine Untergruppe Z der Fundamentalgruppe Γ von V sei G_Z die Menge der $c \in \Pi(V)$, so daß c eine geschlossene Geodätische ist und außerdem frei homotop ist zu einem Element aus $Z-\{e\}$. Statt M^{G_Z} und N^{G_Z} verwenden wir einfachheitshalber die Symbole M^Z und N^Z.

In unseren Resultaten spielen die beiden folgenden Bedingungen an Z eine wichtige Rolle.

<u>Bedingung (*).</u> Sei $\gamma \in Z-\{e\}$ und γ^p in Γ konjugiert zu γ^q für $p, q > 0$. Dann ist $p = q$.

<u>Bedingung (+).</u> Sei $\gamma \in \Gamma$ und $\gamma^p \in Z-\{e\}$. Dann ist $\gamma \in Z$.

<u>Bemerkungen.</u> (a) Falls Z die Bedingung (+) erfüllt, dann ist G_Z vollständig. In diesem Falle gelten also die Ungleichungen des obigen Lemmas für die Funktionen M^Z und N^Z.

(b) Falls Z die Bedingung (*) erfüllt, dann ist Z torsionslos. Falls Z unendlich zyklisch ist und $\gamma \in Z-\{e\}$, dann gilt (*) für Z genau wenn γ^p nicht konjugiert ist zu γ^q für $|p| \neq |q|$. (Aus $\delta\gamma^p\delta^{-1} = \gamma^q$ folgt

$$\delta^2\gamma^{p^2}\delta^{-2} = \delta(\delta\gamma^p\delta^{-1})^p\delta^{-1} = \gamma^{q^2}$$

also $p^2 = q^2$.) Dies gilt beispielsweise, wenn die zu γ gehörende Homologieklasse in $H_1(V)$ unendliche Ordnung hat.

(c) Falls Γ die Fundamentalgruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit mit nicht positiver Krümmung ist, so gilt (*) für alle Untergruppen von Γ. Es kann aber sein, daß $\gamma \in \Gamma-\{e\}$ konjugiert ist zu γ^{-1} (Kleinsche Flasche).

<u>1.2 Lemma.</u> Sei Z unendlich zyklisch. Dann folgt (*) aus (+).

Beweis. Sei $\gamma \in Z$ und γ^p in Γ konjugiert zu γ^q, also $\delta\gamma^p\delta^{-1} = \gamma^q$ für ein geeignetes $\delta \in \Gamma$, und $p, q > 0$. Wir können annehmen, daß γ ein Erzeugendes von Z ist. Dann ist $\delta\gamma\delta^{-1} \in Z-\{e\}$ weil

$$(\delta\gamma\delta^{-1})^p = \delta\gamma^p\delta^{-1} = \gamma^q \in Z-\{e\}$$

Da Z unendlich zyklisch ist folgt, daß p ein Teiler von q ist. Weil die Rollen von p und q vertauschbar sind, ist auch q ein Teiler von p. Also ist $p = q$. QED

Wir kommen nun zum Beweis einer verallgemeinerten Fassung des ersten Satzes aus der Einleitung. Man sagt, daß V die Mannigfaltigkeit V_0 dominiert, falls es Abbildungen

$$f\colon V_0 \to V \quad \text{und} \quad f_0\colon V \to V_0$$

gibt, so daß $f_0 \circ f$ homotop ist zur identischen Abbildung auf V_0, siehe [Sp], Seite 421. Es ist klar, daß V_0 von V dominiert wird, falls V homöomorph zu einem Produkt $V_0 \times V_1$ ist. Damit folgt der erste Satz der Einleitung aus

1.3 Satz. V dominiere eine kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit V_0. Sei $Z \subset \Gamma$ unendlich zyklisch. Dann gilt:

(i) Falls Z die Bedingung $(*)$ erfüllt, so ist

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t^2 > 0$$

(ii) Falls Z die Bedingung $(+)$ erfüllt, so ist

$$\limsup_{t \to \infty} N^Z(t)/t^2 > 0$$

Beweis. Nach einem Satz von D. Sullivan gibt es eine Folge rationaler Homologieklassen h_k, $k \in \mathbb{N}$, im Raum $\Omega_x(V_0)$ der Schleifen von V_0 in einem fest gewählten Punkt $x \in V_0$, so daß

$$\dim(h_k) = ak + b \quad \text{mit} \quad a > 0$$

$$\text{und} \quad j_*(h_k) \neq 0$$

wobei $j\colon \Omega_x(V_0) \to \Lambda(V_0)$ die Inklusion bezeichnet, siehe [Su] oder (4.3.1) in [K]. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen

$$a > 2\dim(V)$$

M. Gromov bewies, daß es eine Konstante C gibt, so daß jede Homologieklasse h in $\Omega_x(V_0)$ einen repräsentierenden Zykel z besitzt mit

$$\sup \{L(d) \mid d \in |z|\} \leq C\dim(h)$$

siehe den Beweis von (1.4) in [G2] oder (7.3) in [GLP].

Sei nun c eine Schleife auf V mit $f(x) = c(0)$, so daß c ein Erzeugendes von Z repräsentiert. Bezeichne mit $\Lambda(c^i)$ alle geschlossenen Kurven auf V, die frei homotop zu c^i sind. Dann ist

$$h_{ik} = c^i{}_*(f\cdot h_k)$$

eine nicht verschwindende Homologieklasse in $\Lambda(c^i)$, denn $f_0\cdot h_{ik}$ ist homolog zu $j_*(h_k)$, weil $f_0\cdot f$ homotop ist zur identischen Abbildung auf V_0. Aus dem oben gesagten folgt, daß wir die Metrik auf V so renormalisieren können, daß

$$\kappa_{ik} = \inf_{z \in h_{ik}} \sup \{L(d) \mid d \in |z|\} \leq i + k$$

Es folgt, daß es eine geschlossene Geodätische $c_{ik} \in \Lambda(c^i)$ gibt mit

$$L(c_{ik}) = \kappa_{ik} \leq i + k \quad \text{und}$$

$$\operatorname{ind}(c_{ik}) \leq \dim(h_{ik}) = ak + b < \operatorname{ind}(c_{ik}) + 2\dim(V)$$

vergleiche [Mi], Seite 121. Die letzte Ungleichung gilt, weil die Nullität einer geschlossenen Geodätischen immer kleiner als $2\dim(V)$ ist. (Die Nullität ist gegeben durch die Anzahl der linear unabhängigen periodischen Jacobifelder entlang der geschlossenen Geodätischen.) Weil $a > 2\dim(V)$ ist, und weil Z die Bedingung $(*)$ erfüllt folgt, daß c_{ik} und c_{im} geometrisch verschieden sind für $k \neq m$. Damit folgt (ii) aus (1.1) und $(*)$.

Bezeichne mit $n(t)$ die Anzahl der geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen d der Länge $\leq t$, so daß d^i frei homotop ist zu c^i für ein $i = i(d) > 0$. Sei p eine Primzahl. Wir behaupten, daß es zumindest $p - n(2)$ geometrisch verschiedene geschlossene Geodätische d der Länge $\leq 2p$ und frei homotop zu c^p gibt, so daß keine der Iterierten der d unterliegenden primen geschlossenen Geodätischen d_o frei homotop ist zu c^q für eine Primzahl $q \neq p$:

Falls $k \leq p$, so ist $L(c_{pk}) \leq 2p$. Sei c_o die zu c_{pk} gehörende prime geschlossene Geodätische, also $c_{pk} = c_o{}^j$, $j > 0$. Falls p ein Teiler von j ist, $ps = j$, so ist $(c_o{}^s)^p$ frei homotop zu c^p. Andererseits gilt

$$L(c_o{}^s) = L(c_{pk})/p \leq 2$$

Also kann für höchstens $n(2)$ der c_{pk} die Primzahl p ein Teiler von $j = j(c_{pk})$ sein.

Falls aber p kein Teiler von j ist, so ist keine Iterierte $c_o{}^m$ von c_o frei homotop zu c^q für eine Primzahl $q \neq p$. Sonst wäre nämlich c^{qj} frei homotop zu $c_o{}^{jm}$ und $c_o{}^{jm}$ frei homotop zu c^{pm}. Wegen der Bedingung $(*)$ würde folgen $p|qj$; das wäre ein Widerspruch weil p nicht j teilt und $p \neq q$.

Für die Funktion N^Z folgt

$$N^Z(t) \geq \sum_{2 \leq p \leq t/2} (p - n(2)) \text{ , } p \text{ Primzahl}$$

Die Funktion auf der rechten Seite ist asymptotisch zu $t^2/4\ln(t)$ weil wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n(2) < \infty$ annehmen können. QED

<u>Bemerkung.</u> Aus dem Beweis folgt $\liminf_{t \to \infty} M^Z(t)/t^2 > 0$.

Mit einer ähnlichen Methode erhält man den folgenden Satz.

<u>1.4 Satz.</u> Es gebe eine Abbildung $f: S^{2m+1} \to V$, $m > 0$, so daß $f_*[S^{2m+1}]$ rational nicht nullhomolog ist. Falls $Z \subset \Gamma$ unendlich zyklisch ist, so gelten die Behauptungen (i) und (ii) des vorherigen Satzes.

<u>Beweis.</u> Wir beschreiben zunächst die rationale Homologie von $\Omega_X(S^{2m+1})$. Es gilt

$$H_*(\Omega_X(S^{2m+1})) = \begin{cases} \mathbb{Q} & * = 2mk,\ k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn man ein Erzeugendes h_1 in $H_{2m}(\Omega_X(S^{2m+1}))$ gewählt hat und ω die zu h_1 duale Kohomologieklasse ist, dann kann man (rational!) Erzeugende $h_k \in H_{2mk}(\Omega_x(S^{2m+1}))$, $k \geq 2$, finden, so daß

$$\omega^k(h_k) = 1 \quad \text{für alle} \quad k > 0$$

Ein kanonisches Erzeugendes h_1 erhält man wie folgt: man wählt einen Homöomorphismus

$$H: I^{2m+1}/\partial(I^{2m+1}) \to S^{2m\ 1}$$

und assoziert zu H einen sphärischen Zykel z durch die Abbildung

$$\tilde{H}: I^{2m}/\partial(I^{2m}) \to \Omega_x(S^{2m+1})$$

die definiert ist durch $\tilde{H}(y)(t) := H(y, t)$. Der Zykel z repräsentiert dann ein Erzeugendes h_1.

Wie im Beweis des vorigen Satzes erklären wir nun Homologieklassen $h_{ik} \in \Lambda(c^i)$ durch

$$h_{ik} = c^i{}_*(f \cdot h_k)$$

Dann ist $h_{ik} = F_{i*}(h_k)$, wobei

$$F_i: \Omega_x(S^{2m+1}) \to \Lambda(c^i)$$

gegeben ist durch $F_i(d) = c^i{}_*(f \cdot d)$.

Wir wollen nun zeigen, daß die h_{ik} nicht nullhomolog sind. Zunächst zeigen wir dies für die h_{i1}. Zu diesem Zweck erklären wir eine lineare Abbildung

$$e_*: H_*(\Lambda(c^i)) \to H_{*+1}(V)$$

Auf Kettenniveau ist die e_* erzeugende Abbildung e gegeben durch die Auswertung $a: \Lambda(c^i) \times S^1 \to V$, und zwar

$$e: (\sigma: \Delta^* \to \Lambda(c^i)) \to (\tilde{\sigma}: \Delta^* \times S^1 \to V)$$

wobei $\tilde{\sigma} = a \cdot (\sigma \times id)$. Hiebei ist Δ^* der Standardsimplex und

$\Delta^* \times S^1$ geeignet simplizial unterteilt. Es ist klar, daß

$$e_*(h_{i1}) = f_*[S^{2m+1}] \neq 0$$

Also gilt $h_{i1} \neq 0$ für alle i.

Wähle nun eine Kohomologieklasse ω_i in $H^{2m}(\Lambda(c^i))$ mit $\omega_i(h_{i1}) = 1$. Dann gilt $F_i^*(\omega_i) = \omega$, denn

$$F_i^*(\omega_i)(h_1) = \omega_i(F_{i*}(h_1)) = 1$$

Also folgt

$$\omega_i^k(h_{ik}) = \omega_i^k(F_{i*}(h_k)) = F_i^*(\omega_i)^k(h_k) = 1$$

und damit $h_{ik} \neq 0$.

Der Satz folgt nun wie oben. QED

Abschnitt 2. Eine allgemeine Abschätzung

Für eine geschlossene Kurve c in V sei $\Lambda(c)$ die freie Homotopieklasse von c. Statt $d \in \Lambda(c)$ schreiben wir auch $d \sim c$.

Die Abbildung $p: \Lambda(c) \to V$, $p(d) = d(0)$, ist eine Faserung. Die Faser $\Omega(c)$ über $x = c(0)$ besteht aus allen $d \in \Lambda$, so daß $d(0) = x$ und so daß die Homotopieklassen von c und d konjugiert sind in $\Gamma = \pi_1(V, x)$. Die Wegzusammenhangskomponente von c in $\Omega(c)$ ist die Homotopieklasse $[c]$ von c in Γ.

Sei $I = [0, 1]$. Zu einer stetigen Abbildung

$$f: (I^k, \partial I^k) \to (V, x), \quad k \geq 2$$

assoziieren wir die Abbildung

$$f_c: (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \to (\Omega(c), c)$$

die gegeben ist durch die Formel

$$f_c(y)(t) = \begin{cases} c(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(y, 2t-1) & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Weil $d \to c*d$ eine Homotopieäquivalenz der Homotopieklasse der Punktkurve x mit $[c]$ definiert folgt, daß

$$\pi_k(V, x) \to \pi_{k-1}(\Omega(c), c), \quad f \to f_c$$

ein Isomorphismus ist für $k \geq 2$.

Für die Faserung $p: \Lambda(c) \to V$ haben wir die exakte Sequenz

$$\ldots \to \pi_{k+1}(V, x) \to \pi_k(\Omega(c), c) \xrightarrow[i_*]{} \pi_k(\Lambda(c), c) \xrightarrow[p_*]{} \pi_k(V, x) \to \ldots$$

wobei $i: (\Omega(c), c) \to (\Lambda(c), c)$ die Inklusion ist. Mit

$$A_c: \pi_k(V, x) \to \pi_k(V, x), \quad k > 0$$

sei der durch c induzierte Automorphismus bezeichnet, siehe [Hu], Seite 130. Außerdem bezeichnen wir die Homotopieklasse einer Abbildung h mit $[h]$. Das folgende Lemma folgt sofort aus der Definition von A_c.

2.1 Lemma. (i) Sei $[f] \in \pi_k(V, x)$ mit $k \geq 2$. Dann gilt

$$[f] \in \operatorname{im}(A_c - \mathrm{id}) \longleftrightarrow [f_c] \in \ker(i_*)$$

$$[f] \in \ker(A_c - \mathrm{id}) \Longleftrightarrow [f] \in \operatorname{im}(p_*)$$

(ii) $[f] \in \Gamma$ ist in $\operatorname{im}(p_*)$ genau dann wenn $[f]$ im Zentralisator von $[c]$ in Γ enthalten ist.

Auf Λ operiert die Gruppe S^1 durch Reparametrisierung. Den Orbit von c unter dieser Operation bezeichnen wir mit S^1c. Falls c keine Punktkurve ist, dann ist S^1c homöomorph zu S^1. Die Abbildung $S^1 \to S^1c$, $s \to sc$, ist eine m-fache Überlagerung, wobei m die Multiplizität von c ist.

2.2 Lemma. Die Homotopieklasse $[c]$ habe unendliche Ordnung in Γ. Außerdem sei zumindest eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $A_c - \mathrm{id}$ ist kein Isomorphismus für ein $k \geq 2$

(ii) der Zentralisator von $[c]$ in Γ ist eine echte Obermenge der von $[c_0]$ erzeugten unendlich zyklischen Gruppe, wobei c_0 die c unterliegende prime Schleife ist.

Dann gibt es eine Konstante κ und Abbildungen

$$F_n\colon (I^m, \partial I^m) \to (\Lambda(c^n), c^n), \quad n > 0 \quad (m \text{ ist fest})$$

so daß F_n nicht in S^1c^n hinein deformiert werden kann und

$$\sup L \circ F_n \leq nL(c) + \kappa$$

<u>Bemerkung.</u> Es ist auch leicht zu sehen, daß die Inklusion $S^1c \to \Lambda(c)$ genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn (i) und (ii) beide nicht gelten.

<u>Beweis.</u> Weil $A_{c^n} = A_c{}^n$ und

$$A_c{}^n - \mathrm{id} = (A_c - \mathrm{id})(\mathrm{id} + A_c + \ldots + A_c{}^{n-1})$$

erhalten wir

$$\ker(A_c - \mathrm{id}) \subset \ker(A_{c^n} - \mathrm{id})$$
$$\mathrm{im}(A_c - \mathrm{id}) \supset \mathrm{im}(A_{c^n} - \mathrm{id})$$

Wir diskutieren zunächst den Fall, daß $A_c - \mathrm{id}$ nicht surjektiv ist für ein $k \geq 2$. Dann gibt es also eine Abbildung

$$f\colon (I^k, \partial I^k) \to (V, x)$$

so daß $[f] \notin \mathrm{im}(A_{c^n} - \mathrm{id})$ ist für alle $n > 0$. Man kann $f_{c^n} =: F_n$ nicht in S^1c^n hinein deformieren, denn sonst wäre F_n entweder nullhomotop, was (2.1) widerspricht, oder $p_* \cdot F_n$ wäre ein nicht verschwindendes Element in der von $[c_0]$ erzeugten unendlich zyklischen Gruppe, was $p_\# \cdot i_* = 0$ widerspricht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß f differenzierbar ist. Aus der Definition von f_{c^n} ergibt sich dann, daß man

$$\kappa = \sup_{y \in I^{k-1}} L(t \to f(y, t))$$

wählen kann. Damit ist die Behauptung im ersten Fall bewiesen.

Falls es ein $[f] \neq 0$ in $\ker(A_c - \mathrm{id})$ gibt, dann liegt $[f]$ nach (2.1) in $\mathrm{im}(p_*)$. Es gibt also eine Homotopieklasse $[F_1]$ in $\Lambda(c)$ mit $p_*([F_1]) = [f]$. Weil $[f] \neq 0$ und $k \geq 2$

kann man F_1 nicht in S^1c hinein deformieren. Falls es ein $[f]$ im Zentralisator von $[c]$ gibt, daß nicht in der von $[c_0]$ erzeugten Untergruppe von Γ liegt, dann ist auch $[f] = p_*([F_1])$ und F_1 läßt sich nicht in S^1c hinein deformieren. In beiden Fällen fogt genauso, daß man beliebige Lifte von $[f]$ in $\Lambda(c^n)$ nicht in S^1c^n hinein deformieren kann. Eine mögliche Wahl für einen solchen Lift ist $F_1{}^n$. Aber $F_1{}^n$ erfüllt nicht unbedingt die geforderte Ungleichung für die Längen. Stattdessen kann man aber die im Beweis von Theorem 1 in [BK] benützte Methode benützen, um aus F_1 geeignete Abbildungen F_n zu konstruieren. QED

Weil die geschlossenen Geodätischen die kritischen Punkte des Längenfunktionals sind, haben wir

<u>2.3 Lemma.</u> Sei c nicht nullhomotop und kürzeste geschlossene Geodätische in $\Lambda(c)$. Falls $[F]$ eine Homotopieklasse in $\Lambda(c)$ ist, die nicht in S^1c hinein deformiert werden kann, und falls es nur endlich viele geschlossene Geodätische in $\Lambda(c)$ der Länge $L(c)$ gibt, dann enthält $\Lambda(c)$ eine geschlossene Geodätische d mit

$$L(c) < L(d) \leq \sup L \circ F$$

Wir beweisen nun einige Abschätzungen für N^Z, wobei grundsätzlich vorausgesetzt wird, daß Z eine unendlich zyklische Untergruppe von Γ mit der Eigenschaft (*) (vergleiche Abschnitt 1) ist. Die Schleife c repräsentiere ein Erzeugendes von Z. Dann liest sich (*) wie folgt:

$(*) \qquad c^i \sim c^j,\ i, j > 0 \Longrightarrow i = j$

Für jedes $n > 0$ sei a_n eine kürzeste geschlossene Geodätische unter all den Kurven d, so daß $d^m \sim c^{nm}$ für ein $m = m(d) > 0$. b_n sei eine kürzeste geschlossene Geodätische in $\Lambda(c^n)$. Setze

$$\alpha_n = L(a_n) \quad \text{und} \quad \beta_n = L(b_n)$$

Dann ist $0 < \alpha_n \leq \beta_n$, $\alpha_n \leq n\alpha_1$ und $\beta_n \leq n\beta_1$ für alle $n > 0$.

(2.4) Falls $\alpha_n < \beta_n$ für alle $n > 0$, dann ist

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t \geq 1/\alpha_1 > 1/\beta_1$$

<u>Beweis.</u> Nach Definition von α_1 gibt es ein $n > 0$ mit $\beta_n \leq n\alpha_1$. Wähle nun ein $m > 0$ mit $a_n{}^m \sim c^{mn}$. Wegen $\alpha_n < \beta_n$ folgt dann

$$\beta_{mn} \leq m\alpha_n < m\beta_n \leq mn\alpha_1$$

Dann folgt (2.4) also aus (2.5). QED

(2.5) Falls $\beta_n < n\alpha_1$ für ein $n > 0$, dann ist

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t \geq 1/\alpha_1 \geq 1/\beta_1$$

<u>Beweis.</u> Wähle eine differenziebare Schleife $d \sim c$, so daß $d(0) = b_n(0)$ und so daß

$$b_n{}^s * d^r \sim c^{sn+r} \quad \text{für alle } s \text{ und } r$$

Dann gilt also

$$\beta_m < s\beta_n + nL(d)$$

falls

$$sn \leq m < (s+1)n$$

Wähle $s_o > 0$, so daß

$$nL(d) < s_o(n\alpha_1 - \beta_n)$$

Für $m > s_o n$ erhalten wir dann

$$\beta_m < s\beta_n + s(n\alpha_1 - \beta_n) = sn\alpha_1 \leq m\alpha_1$$

Sei dann $p > s_o n$ eine Primzahl und sei $b_p = d^i$, wobei d die b_p unterliegende prime geschlossene Geodätische ist (also $i > 0$). Falls p ein Teiler von i wäre, $kp = i$, dann wäre $(d^k)^p \sim c^p$ und

$$L(d^k) = L(b_p)/p < \alpha_1$$

Dies widerspricht aber der Definition von α_1. Also ist p kein Teiler von i. Dann ist aber keine Iterierte d^j von d frei homotop zu c^q, wenn q eine Primzahl $\neq p$ ist. Denn sonst wäre

$$c^{qi} \sim d^{ji} \sim c^{pj}$$

also p ein Teiler von i wegen (*). Daher sind b_p und b_q geometrisch verschieden falls p und q verschiedene Primzahlen $> s_o n$ sind. Die Behauptung folgt nun aus dem Primzahlsatz wegen $L(b_p) < p\alpha_1$. QED

(2.6) Falls $\alpha_n = \beta_n$ für ein $n > 0$ und falls zumindest eine der beiden Bedingungen (i) oder (ii) von (2.2) erfüllt ist für $[b_n]$, so gilt

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t \geq 1/\alpha_n = 1/\beta_n$$

Beweis. Wir können annehmen, daß $N^Z(t)$ endlich ist für alle t. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß keine geschlossene Geodätische d existiert mit $d^m \sim c^m$ für ein $m > 0$ und so daß

$$\alpha_1 < L(d) < \alpha_1 + \varepsilon$$

sonst gäbe es eine Folge d_k solcher Geodätischer mit $L(d_k) \to \alpha_1$. Weil V kompakt ist, könnten wir durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen, daß alle d_k so nahe aneinanderliegen, daß sie frei homotop wären. Dann gäbe es aber ein festes m mit $d_k{}^m \sim c^m$ für alle k, und daher wäre $N^Z(t)$ nicht endlich für alle $t > m\alpha_1$.

Weil $N^{nZ} \leq N^Z$ für die Untergruppe nZ vom Index n in Z ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n = 1$ und $b_1 = c$ annehmen.

Wegen (2.5) können wir annehmen, daß c^m eine kürzeste geschlossene Geodätische in $\Lambda(c^m)$ ist für alle $m > 0$. Nach (2.2) und (2.3) gibt es dann für alle $m > 0$ eine geschlossene Geodätische c_m in $\Lambda(c^m)$ mit

$$L(c^m) < L(c_m) < L(c^m) + \kappa$$

wobei κ eine von m unabhängige Konstante ist.

Wähle m_o mit $m_o\varepsilon > \kappa$. Sei p eine Primzahl $> m_o$ und sei $c_m = d^i$, wobei d die c_m unterliegende prime geschlossene Geodätische ist. Falls p ein Teiler von i wäre, $kp = i$, dann wäre $(d^k)^p \sim c^p$ und

$$L(d^k) < (L(c^p)+\kappa)/p < \alpha_1 + \varepsilon$$

was der Wahl von ε widerspricht. Also ist p kein Teiler von i. Wie im Beweis von (2.5) folgt, daß c_p und c_q geometrisch verschieden sind für verschiedene Primzahlen $p, q > m_0$. QED

(2.7) Falls $\alpha_n = \beta_n$ für ein $n > 0$ und falls es eine geschlossene Geodätische c_n in $\Lambda(c^n)$ gibt mit $L(c_n) = L(b_n)$, welche nicht in $S^1 b_n$ enthalten ist, so gilt

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t \geq 1/\alpha_n = 1/\beta_n$$

Beweis. Wie im Beweis von (2.6) können wir annehmen, daß $n = 1$ ist und daß $b_m = c^m$ ist für alle $m > 0$. Insbesondere ist dann auch $c_1{}^m$ eine Kürzeste in $\Lambda(c^m)$ für alle $m > 0$. Außerdem können wir natürlich annehmen, daß $N^Z(t)$ endlich ist für alle t.

Wähle nun einen Weg F von c zu c_1. Die im Beweis von Theorem 1 in [BK] benützte Methode ergibt dann einen Weg F_m von c^m zu $c_1{}^m$, so daß

$$\sup L \cdot F_m < mL(c) + \kappa$$

für eine von m unabhängige Konstante κ. Damit erhalten wir dann eine geschlossene Geodätische d_m in $\Lambda(c^m)$ mit

$$L(c^m) < L(d_m) < L(c^m) + \kappa$$

Die Behauptung folgt nun wie im Beweis von (2.6). QED

Die letzten Abschätzungen kann man anwenden, wenn der Normalisator der Untergruppe nZ von Z vom Index n nicht unendlich zyklisch ist. Weil nZ die Bedingung (*) erfüllt, ist dann entweder der Zentralisator von nZ nicht unendlich zyklisch. Dann gilt Bedingung (ii) aus (2.2) für b_n. Oder $c^n \sim c^{-n}$, also $b_n^{-1} \in \Lambda(c^n)$. Dann ist $b_n^{-1} \notin S^1 b_n$, aber eine Kürzeste in $\Lambda(c^n)$.

Die Bedingung $\alpha_n = \beta_n$ gilt trivialerweise, wenn Z nicht nur die Bedingung (*) erfüllt, sondern die stärkere Eigenschaft (+) besitzt. Aus (2.i), $3 < i < 8$, und aus $N^{nZ} \leq N^Z$ für $n > 0$ folgt damit:

<u>2.8 Satz.</u> Die von der Schleife c erzeugte Untergruppe Z von $\Gamma = \pi_1(V, c(0))$ erfülle (*). Ferner sei für ein $n > 0$ zumindest eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $A_c^n - id$ ist kein Isomorphismus für ein $k \geq 2$

(ii) Der Normalisator von nZ ist nicht unendlich zyklisch.

Dann gilt

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t > 0$$

Falls Z außerdem die Bedingung (+) erfüllt, so ist

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t \geq 1/\beta_n$$

wobei β_n die Länge einer kürzesten Kurve in der freien Homotopieklasse von c^n ist.

<u>Bemerkungen.</u> (a) V. Bangert und W. Klingenberg [BK] bewiesen, daß V unendlich viele geschlossene Geodätische hat, falls V ein Produkt $V_1 \times V_2$ ist und die erste Bettische Zahl von V nicht verschwindet. Dieses Resultat folgt aus (2.8).

(b) Im Beweis ihres in der Einleitung erwähnten Satzes zeigen V. Bangert und N. Hingston, daß es ein $n > 0$ gibt, so daß $A_c{}^n - \mathrm{id}$ nicht surjektiv ist für ein $k \geq 2$. Dies ist der schwierigste Schritt in ihrem Beweis. Weil Γ unendlich zyklisch ist, folgt dann sehr leicht aus (2.1), daß die geschlossenen Geodätischen wie die Primzahlen wachsen. Die Schwierigkeit im Beweise von (2.8) besteht umgekehrt darin, daß die Struktur von Z in Γ verwickelt sein kann.

(c) Unter einer etwas stärkeren Voraussetzung als ($*$) und der Voraussetzung, daß der Zentralisator von Z nicht unendlich zyklisch ist, bewies M. Tanaka, daß es unendlich viele geschlossene Geodätische auf V gibt. Sein prinzipielles Hilfsmittel ist die Theorie der Isometrie-invarianten Geodätischen, siehe [T].

(d) Sei $h: \pi_k(V) \to H_k(V)$, $k \geq 2$, der kanonische Homomorphismus. Eine Homotopieklasse $[f]$ ist nicht im Bild von $A_c - \mathrm{id}$ wenn $h([f]) \neq 0$ ist, denn $h([g]) = h(A_c[g])$ für alle $[g]$. Ein solches $[f]$ existiert falls alle $\pi_i(V)$, $1 < i < k$, verschwinden und falls die kanonische Abbildung

$$H_k(V) \to H_k(\Gamma)$$

einen nicht-trivialen Kern hat. Der Kern besteht nämlich gerade aus dem Bild von h, siehe [Hu], Seite 288.

Falls beispielsweise V orientierbar, $\dim(V) = 3$ und $b_1(\Gamma) > b_2(\Gamma)$, so ist $\mathrm{im}(h)$ nicht trivial. Denn

$$b_1(\Gamma) = b_1(V) = b_2(V)$$

wegen der Poincaré-Dualität. Also muß $H_2(V) \to H_2(\Gamma)$ einen nicht trivialen Kern haben. Hieraus folgt übrigens der Satz von V. Bangert und N. Hingston in Dimension drei (mit (2.8)).

(e) Falls V negative Krümmung hat, dann erfüllt jede unendlich zyklische Untergruppe Z von Γ die Bedingung (*), aber es gilt $N^Z(t) < 2$ für alle t.

Zum Schluß dieses Abschnitts diskutieren wir die Ergebnisse in [BTZ]. Zum einen haben wir nämlich in unserer Einleitung ein Resultat aus [BTZ] etwas stärker zitiert, als es dort formuliert wird. Zum anderen ist (2.8) dann ein Verschärfung von Theorem B aus [BTZ], wenn die Voraussetzungen von Theorem A aus [BTZ] nicht erfüllt sind. Wir erklären dies nun.

Für eine Schleife c und eine Metrik g auf V sei $N_g^c(t)$ wie in [BTZ] die Anzahl der geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen d von g, so daß $c^k \sim d$ für ein $k = k(d) \neq 0$. Falls nun die Homotopieklasse von c endliche Ordnung hat, dann zählt $N_g^c(t)$ auch nullhomotope geschlossene Geodätische. Deshalb ist dann

$$N_g^c(t) < N^Z(t) = N_g^Z(t)$$

falls g nullhomotope geschlossene Geodätische der Länge $\leq t$ hat. Theorem A in [BTZ] besagt nun, daß

$$\liminf_{t \to \infty} N_g^c(t)\ln(t)/t > 0$$

ist für eine generische Metrik g auf V falls c nicht nullhomotop ist und falls es ganze Zahlen $i \neq j$ gibt, so daß $c^i \sim c^j$. Für ein solches g folgt also

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)\ln(t)/t > 0$$

nur, falls die Homotopieklasse von c unendliche Ordnung hat.

Der Beweis von Theorem A in [BTZ] zeigt zwar, daß die letzte Ungleichung auch im allgemeinen Fall richtig bleibt. Aber mit ähnlichen Argumenten erhält man auch die folgende Verschärfung, deren Beweis wir skizzieren.

(2.9) Die geschlossene Kurve c sei nicht nullhomotop, aber ihre Homotopieklasse habe endliche Ordnung. Dann gilt

$$\liminf_{t \to \infty} n_g^c(t)\ln(t)/t > 0$$

für eine generische Metrik g auf V. Hiebei ist $n_g^c(t)$ die Anzahl der geometrisch verschiedenen geschlossenen Geodätischen von g der Länge $\leq t$ in der freien Homotopieklasse von c.

Beweis. Für eine generische Metrik g auf V sind alle zu c frei homotopen geschlossenen Geodätischen hyperbolisch oder vom Twist-Typ, siehe [KT] oder (3.3.10) in [K].

Wir nehmen zunächst an, daß g eine zu c frei homotope geschlossene Geodätische vom Twist-Typ hat. In einer beliebig kleinen "Tube" um diese geschlossene Geodätische c_1 finden wir dann nach dem Beweis des Satzes von Birkhoff-Lewis – siehe [Mo] oder (3.3.A) in [K] – für jede genügend große Primzahl p eine "neue" geschlossene Geodätische c_p der Länge ungefähr $L(c_p)$ und c_p ist frei homotop zu c^p. Sei nun m die Ordnung der Homotopieklasse von c. Dann ist also c^i homotop zu c falls $i = jm+1$ für ein $j \geq 1$. Die Anzahl der Primzahlen in einer solchen arithmetischen Folge wächst aber wie const.$t/\ln(t)$. Daraus folgt dann die Abschätzung.

Im Fall, daß alle zu c frei homotopen geschlossenen Geodätischen hyperbolisch sind, erhält man mit den Argumenten aus [BTZ] sogar eine lineare untere Abschätzung für $n_g^c(t)$.
QED

Wie in [BTZ] definieren wir für eine geschlossene Kurve c den Turm $T(c)$ als die Menge aller geschlossenen Kurven a, so daß es $i, j \neq 0$ und eine geschlossene Kurve b gibt mit

$$b^i \sim a \quad \text{und} \quad b^j \sim c$$

Nach Definition gilt $T(c) \subset T(c^n)$ für alle $n > 0$. Theorem B in [BTZ] besagt nun, daß

$$\liminf_{t \to \infty} N_g^c(t)\ln(t)/t > 0$$

für eine generische Metrik g auf V falls $T(c) \neq T(c^n)$ für ein $n > 0$. (Letzteres impliziert, daß c nicht nullhomotop ist.) Falls nun die Voraussetzung von Theorem A nicht erfüllt ist, so erfüllt die von c erzeugte Untergruppe Z von Γ die Bedingung (*). Aus $T(c) \neq T(c^n)$ folgt dann, daß der Zentralisator von nZ nicht unendlich zyklisch ist. Also gilt nach (2.8) die Abschätzung in Theorem B nicht nur im generischen Fall sondern immer — solange die Voraussetzung von Theorem A nicht erfüllt ist.

Abschnitt 3. Der Beweis des zweiten Satzes

Eine Gruppe Δ heißt polyzyklisch, falle es Untergruppen

$$\Delta = \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_k = \{e\}$$

gibt, so daß Δ_i/Δ_{i+1} eine endlich erzeugte Abelsche Gruppe ist.

3.1 Lemma. Sei Δ ein polyzyklischer Normalteiler der Gruppe Γ. Falls $Z \subset \Delta$ unendlich zyklisch ist, dann erfüllt Z die Bedingung $(*)$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$\Delta_{i+1} = [\Delta_i,\Delta_i]$$

annehmen, siehe (4.1) in [W]. Dann sind alle Δ_i Normalteiler in Γ, denn Δ_i wird von den Kommutatoren aus Δ_{i-1} erzeugt (für $i \geq 2$).

Induktiv nehmen wir an, daß jede unendlich zyklische Untergruppe von Δ_i die Bedingung $(*)$ erfüllt und daß $Z \subset \Delta_{i-1}$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten.

Entweder die Projektion vo Z in Δ_{i-1}/Δ_i ist endlich. Dann hat Z eine Untergruppe $\tilde{Z}$ von endlichem Index, welche in Δ_i enthalten ist. Daher erfüllt $\tilde{Z}$ nach Induktionsannahme $(*)$. Es folgt, daß Z die Bedingung $(*)$ erfüllt.

Oder die Projektion von Z in Δ_{i-1}/Δ_i ist unendlich zyklisch. In diesem Falle zeigen wir, daß $Z \bmod \Delta_i$ die Bedingung $(*)$ in Γ/Δ_i erfüllt, woraus dann unsere Behauptung folgt. Wir können $\Delta_{i-1} = \Delta$ und $\Delta_i = \{e\}$ annehmen.

Dann ist Δ also eine endlich erzeugte Abelsche, normale Untergruppe von Γ und Z ist eine unendlich zyklische Untergruppe von Δ. Die Menge T der Torsionselemente von Δ ist deshalb eine normale Untergruppe von Γ. Wie oben folgt folgt daher, daß wir $T = \{e\}$ annehmen können. Dann ist Z in einer eindeutig bestimmten maximalen unendlich zyklischen Untergruppe $\tilde{Z}$ von Δ enthalten. Sei γ ein Erzeugendes von $\tilde{Z}$. Falls Z nicht (*) erfüllt, dann ist γ^p in Γ konjugiert zu γ^q für gewisse $p > q > 0$. Es folgt, daß γ^q ein p-faches Vielfaches in Δ ist. Dies ist ein Widerspruch, denn $\tilde{Z}$ ist die eindeutig bestimmte maximale unendlich zyklische Untergruppe, die die von γ^q erzeugte Untergruppe enthält. QED

<u>Bemerkung.</u> Falls $\tilde{\Delta}$ eine Untergruppe von endlichem Index in der Untergruppe Δ von Γ ist, und falls jede unendlich zyklische Untergruppe von $\tilde{\Delta}$ die Bedingung (*) erfüllt, so auch jede in Δ.

Eine Untergruppe von endlichem Index in einer endlich erzeugten Gruppe ist endlich erzeugt, siehe (3.1) in [W]. Weil eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe polyzyklisch ist [W] und ein nicht-triviales Zentrum hat, folgt Satz 2 aus der Einleitung aus (2.8), (3.1) und der obigen Bemerkung. Aus (2.8), (3.1) und dem Ergebnis von V. Bangert und N. Hingston erhalten wir auch das folgende Resultat:

<u>3.2 Satz.</u> Sei Δ ein nicht endlicher polyzyklischer Normalteiler in Γ. Dann gilt

$$\liminf_{t \to \infty} N^{\Delta}(t)\ln(t)/t > 0$$

<u>Beweis.</u> Wir können voraussetzen, daß Γ nicht unendlich zyklisch ist nach [BH]. Falls dann Δ unendlich zyklisch ist, dann ist der Normalisator von Δ in Γ nicht unendlich zyklisch. Falls Δ nicht unendlich zyklisch ist, dann enthält Δ eine unendlich zyklische Untergruppe, deren Zentralisator (in Δ) nicht unendlich zyklisch ist. QED

Für eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe Δ definieren wir induktiv $\Delta_1 = \Delta$ und $\Delta_i = [\Delta,\Delta_{i-1}]$. Wir wählen ein endliches Erzeugendensystem E von Δ fest aus und erklären die Norm eines Elementes durch seine minimale Wortlänge als Wort in E. Der in der Einleitung erwähnten zweiten Abschätzung Gromovs in [G1] liegt das folgende Lemma zugrunde.

<u>3.3 Lemma (Gromov).</u> Sei $\gamma \in \Delta_i$, $i \geq 2$. Dann gibt es eine Konstante C, so daß

$$\|\gamma^m\| \leq Cm^{1/i} \quad \text{für alle} \quad m > 0$$

Für den Beweis dieses Lemmas verweisen wir auf [P], Seite 39. Nimm nun an, daß Δ normal ist in Γ und daß die von $\gamma \in \Delta_i$, $i \geq 2$, erzeugte Gruppe Z unendlich zyklisch ist. Nach (3.1) erfüllt Z die Bedingung $(*)$. Daraus folgt dann leicht

$$\liminf_{t \to \infty} M^Z(t)/t^i > 0$$

und damit insbesondere

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)/t^{i-1} > 0$$

Für $i = 2$ erhält man damit die in der Einleitung zitierte Abschätzung Gromovs aus [G1]. Mit den Argumenten aus dem Beweis von (2.8) folgt aber auch, daß jede genügend große Primzahl p Anlaß gibt zu einer "neuen" zu zählenden geschlossenen Geodätischen der Länge $\leq Cp^{1/i}$. Es folgt also

$$\liminf_{t \to \infty} N^Z(t)(\ln(t)/t)^i > 0 \tag{3.4}$$

Dies folgt, wie gesagt, für $i \geq 2$. Für $i = 1$ ist (3.4) jedoch eine Konsequenz aus (2.8)!

In [G1] wird das von uns zitierte Resultat übrigens allgemeiner formuliert als in unserer Einleitung. Auf Wunsch Gromovs erwähnen wir, daß er nur unsere speziellere Formulierung im Auge hatte und bewies.

Die Abschätzung (3.4) läßt sich manchmal wesentlich verbessern. Als Beispiel betrachtete Gromov den Fall $\Delta = \mathbb{Z}^2$: Falls es ein Element δ in Γ gibt, so daß der Automorphismus von Δ, der der Konjugation mit δ entspricht, Eigenwerte vom Betrag $\neq 1$ hat,dann folgt leicht

$$\|\gamma^m\| \leq C(\gamma)\ln(m)$$

für alle $\gamma \in \Delta$. Das entsprechende N^Z wächst also exponentiell.

Vielleicht kann man ähnliche Abschätzungen auch beweisen, wenn Δ ein endlich erzeugter nilpotenter Normalteiler ist. Zum Beispiel kann man mit den Methoden aus [W] zeigen, daß die Konjugationsklassen (bezüglich Γ) in Δ (gezählt nach dem kleinsten Element) exponentiell wachsen, wenn Γ/Δ unendlich zyklisch ist und Γ nicht fast nilpotent. Hierbei haben wir vorausgesetzt, daß Γ/Δ unendlich zyklisch ist, weil man dann die Konjugationsklassen von Δ ziemlich genau beschreiben kann. QED

Literaturhinweise

[A] T.Apostol, Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976

[BTZ] W.Ballmann, G. Thorbergsson, W.Ziller, Closed Geodesics and the Fundamental Group. Duke Math. J. 48 (1981), 585-588

[BH] V.Bangert, N.Hingston, Closed geodesics on manifolds with infinite abelian fundamental group. Preprint, Freiburg-Philadelphia (1983)

[BK] V.Bangert, W.Klingenberg, Homology generated by iterated closed geodesics. Preprint, Freiburg-Bonn (1982)

[G1] M.Gromov, Three Remarks on Geodesic Dynamics and Fundamental Group. Preprint, Stony Brook, New York

[G2] M.Gromov, Homotopical Effects of Dilatation. J. Diff. Geometry 13 (1978), 303-310

[GLP] M.Gromov, J.Lafontaine, P.Pansu, Structures mètriques pour les variètés riemanniennes. Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981

[Hu] S.-T.Hu, Homotopy Theory. Academic Press, London-New York, 1959

[K] W.Klingenberg, Lectures on Closed Geodesics. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 230, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978

[KT] W.Klingenberg, F.Takens, Generic Properties of Geodesic Flows. Math. Ann. 197 (1972), 323-334

[Mi] J.Milnor, Morse Theory. Annals of Math. Studies 51 Princeton University Press, Princeton N.J. 1963

[Mo] J.Moser, Proof of a generalized Form of a Fixed Point Theorem due to G.D.Birkhoff. Lecture Notes in Math. 597, 464-494. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New Nork, 1977

[P] P.Pansu, Geometrie du Groupe d'Heisenberg. These, Universite Paris VII (1982)

[Sp] E.Spanier, Algebraic Topology. Mc Graw Hill, New York 1966

[Su] D.Sullivan, Differential Forms and the Topology of Manifolds. Manifolds-Tokyo 1973, Herausgeber A.Hattori, University of Tokyo Press, Tokio 1975

[T] M.Tanaka, Closed geodesics on compact Riemannian manifolds with infinite fundamental groups, I. Preprint, Tokai University (1983)

[W] J.Wolf, Growth of Finitely Generated Solvable Groups and Curvature of Riemannian Manifolds. J. Differential Geometry 2 (1968), 421-446

TEIL II. ÜBER DAS ALBER-LEMMA

Im freien Schleifenraum $\Lambda = \Lambda(S^n)$ der n-dimensionalen Sphäre, $n \geq 2$, ist die Menge der parametrisierten Kreise $A = A(S^n)$ enthalten. Dabei ist also c aus A, wenn das Bild von c der Durchschnitt von S^n mit einer (zweidimensionalen) Ebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, die Abstand < 1 vom Ursprung hat und wenn c bezüglich der Standardmetrik proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Wenn die entsprechende Ebene den Ursprung enthält, dann heißt c parametrisierter Großkreis. Die Menge der parametrisierten Großkreise bezeichnen wir mit B.

Auf Λ operiert die Gruppe $O(2)$ durch lineare Reparametrisierung. Die Teilmengen A und B sind invariant. Wir nennen $\Gamma = A/O(2)$ beziehungsweise $\Delta = B/O(2)$ den Raum der (unparametrisierten) Kreise beziehungsweise Großkreise. Zu jeder Ebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ gibt es genau eine dazu parallele Ebene durch den Ursprung. Dies definiert (n-1)-Scheibenbündel

$$\beta: A \to B \quad \text{und} \quad \gamma = \beta/O(2): \Gamma \to \Delta \,.$$

Mit dem Thom-Isomorphismus T kann man also die $\mathbb{Z}_2$-Homologie von (Γ, Γ^α) mit derjenigen von Δ identifizieren, wobei $\alpha > 0$ genügend klein ist und Γ^α die c aus Γ bezeichnet, deren Länge (bezüglich der Standardmetrik) $\leq \alpha$ ist.

Vereinbarung. Der Körper $\mathbb{Z}_2$ ist der Koeffizientenbereich aller vorkommenden Homologie- und Kohomologiegruppen.

Nun ist $\gamma^*: H^*(\Delta) \to H^*(\Gamma)$ ebenfalls ein Isomorphismus. Für alle

h_1 und h_2 aus $H_*(\Delta)$ und $\omega \in H^*(\Delta)$ erhält man dann aus der Definition des Thom-Isomorphismus T

$$\omega \cap h_2 = h_1 \quad \text{genau wenn} \quad \gamma^*(\omega) \cap T(h_2) = T(h_1).$$

Damit erhalten wir erstens, daß die Stiefel-Whitney Klassen w_1 und w_2 des S^1-Bündels

$$A/\theta \to \Gamma; \; \theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2)$$

$H^*(\Gamma)$ erzeugen und zweitens, daß für alle $h \neq 0$ aus $H_*(\Gamma,\Gamma^\alpha)$ ein $\omega \in H^*(\Gamma)$ existiert mit $\omega \cap h = \{0,0\}$. Dabei sei $\{0,0\}$ der Fundamentalzykel von $(\gamma^{-1}(pt),\gamma^{-1}(pt) \cap \Gamma)$, also die Menge aller Kreise der Länge $\geq \alpha$ parallel zu einem fest gewählten Großkreis, betrachtet als Homologieklasse in (Γ,Γ^α). Die Notation $\{0,0\}$ für diese Klasse wollen wir hier nicht näher erläutern. Man vergleiche Sektion 2.3 aus [K].

Sei nun eine Riemannsche Metrik auf S^n vorgegeben und $\delta > 0$ kleiner als die Energie einer kleinsten geschlossenen Geodätischen. Ferner seien $\Pi = \Lambda/O(2)$ und $\Pi^\delta = \{c \in \Pi \mid E(c) \leq \delta\}$. Falls $\alpha > 0$ genügend klein ist, dann ist Γ^α in Π^δ enthalten. Das Lemma von Alber [A] besagt nun, daß die von

$$i\colon (\Gamma,\Gamma^\alpha) \to (\Pi,\Pi^\delta)$$

induzierten Abbildungen der Homologiegruppen injektiv sind und daß die von

$$j\colon \Gamma \to \Pi$$

induzierten Abbildungen der Kohomologiegruppen surjektiv sind. Nun ist aber $\Lambda/\theta \to \Pi$ kein S^1-Bündel weil die Operation von $O(2)$ auf Λ nicht frei ist. Außerdem gibt es Elemente in Λ, deren Orbit zusammenhängend ist. Daraus folgt, daß Π einfach zusammenhängend ist falls $n > 2$ ist, denn $\pi_i(\Lambda) = 0$ für $i \leq n-2$, siehe (2.6.3) in [B]. Also kann w_1 nicht im Bild von j^* sein für $n > 2$. Allgemeiner gilt sogar $\pi_i(\Pi) = 0$ für $i \leq n-2$, siehe Theorem 8 in [An].

Es stellt sich die Frage, ob wenigstens der andere Teil des Alberschen Lemmas, nämlich die Injektivität von i_* korrekt ist. Nun beruht der Beweis der Injektivität gerade auf der Surjektivität von j^*; er bedarf also einer Modifikation. Wir erläutern das Beweisverfahren für die Injektivität von i_*. Sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$, und sei $f: \Gamma \to X$ stetig mit $f(\Gamma^\alpha) \subset Y$. Sei

$$g(\Gamma,\Gamma^\alpha) \to (X,Y)$$

die entsprechende relative Abbildung. Falls dann w_1 und w_2 im Bild von f^* sind und $g_*\{0,0\} \neq 0$ ist, so ist g_* injektiv. Denn die Annahme impliziert, daß f^* surjektiv ist weil $H^*(\Gamma)$ von w_1 und w_2 erzeugt wird. Nun gibt es zu $h \in H_*(\Gamma,\Gamma^\alpha)$, $h \neq 0$, ein ω in $H^*(\Gamma)$ mit $w \cap h = \{0,0\}$. Wähle ein η in $H^*(X)$ mit $f^*(\eta) = \omega$. Dann folgt

$$\eta \cap g_*(h) = g_*(f^*(\eta) \cap h) = g_*\{0,0\} \neq 0$$

also $g_*(h) \neq 0$. Daher ist g_* injektiv.

In dieser Arbeit wollen wir nun zeigen, daß i_* injektiv ist. Im Beweis wollen wir das obige Verfahren anwenden. Wie wir bereits gesehen haben, können wir nicht $X = \Pi$ wählen. Es genügt, Teilmengen X und Y aus Π zu finden, die Γ beziehungsweise Γ^α enthalten, so daß für f und g wie oben

(i) $w_1, w_2 \in \mathrm{Bild}(f^*)$

(ii) $g_*\{0,0\} \neq 0$ und

(iii) i_* injektiv falls g_* injektiv.

Hierzu benötigen wir einige topologische Resultate über O(2)-Aktionen. Diese werden im ersten Abschnitt bewiesen. Im zweiten Abschnitt beweisen wir, daß i_* injektiv ist.

Für die vielen Anregungen und hilfreichen Diskussionen möchte ich mich bei G. Thorbergsson und W. Ziller bedanken.

Abschnitt 1. Über O(2)-Aktionen

In diesem Abschnitt leiten wir einige topologische Resultate für stetige O(2)-Aktionen auf einem Raum X her. Weil es uns nicht auf die größtmögliche Allgemeinheit ankommt, setzen wir voraus

(i) X ist metrisierbar, also insbesondere parakompakt

(ii) für jeden Punkt $x \in X$ und jede Umgebung U von x gibt es eine Umgebung V von x in U, so daß x ein I_x-äquivarianter Deformationsretrakt von V ist.

Hierbei ist I_x die Isotropiegruppe von x. Ferner gelte zunächst:

(iii) keine Isotropiegruppe enthält ein Element gerader Ordnung.

Wir betrachten $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ in der üblichen Weise als Untergruppe von $O(2)$. Mit Δ_m beziehungsweise Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, sei die von $e^{2\pi i/m}$ beziehungsweise von $e^{2\pi i/m}$ und $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ erzeuge Untergruppe von $O(2)$ bezeichnet. Weil alle Elemente in $O(2)-S^1$ Ordnung zwei haben, folgt aus (iii), daß $I_x = \Delta_{m(x)} \subset S^1$ für alle $x \in X$, wobei $m(x)$ eine ungerade Zahl ist. Aus (ii) folgt, daß die Räume

$$X_m = X/\Gamma_m \quad \text{und} \quad \tilde{X}_m = X/\Delta_m, \ m \in \mathbb{N}$$

lokal kontrahierbar sind für alle m. Wir setzen auch

$$\bar{X} = X/O(2) \quad \text{und} \quad \tilde{X} = X/S'$$

und für ungerade $i \in \mathbb{N}$

$$X^i = \{x \in X \mid m(x) = |I_x| \ \text{teilt } i\}.$$

Analoge Symbole verwenden wir für Teilmengen von X. Es ist klar, daß jedes $x \in X$ eine Umgebung U hat, so daß $m(y)$ ein Teiler von $m(x)$ ist für alle y aus U. Daher sind die X^i offene, $O(2)$-invariante Teilmengen von X, und jede kompakte Teilmenge von X ist in einem der X^i enthalten. Damit erhalten wir für alle offenen $O(2)$-invarianten Teilmengen Y und Z von X

$$(1.1) \qquad H_*(Y_m, Z_m) \cong \lim_{i \text{ ungerade}} H_*(Y_m^i, Z_m^i), \quad m \in \mathbb{N}$$

$$H_*(\bar{Y}, \bar{Z}) \cong \lim_{i \text{ ungerade}} H_*(\bar{Y}^i, \bar{Z}^i)$$

wobei der Isomorphismus und der direkte Limes jeweils durch die Inklusionen induziert werden.

Sei nun i ein Teiler von m und m ungerade. Dann ist die Projektion $p_m^i\colon X_m^i \to \bar{X}^i$ in kanonischer Weise ein S^1-Faserbündel, denn die Operation von $O(2)$ auf X hat "Slices" wegen (i), vergleiche Sektion 2.5 in [B]. Der Abbildungszylinder E_m^i von p_m^i ist dann ein Scheibenbündel über $\bar{X}^i$ mit Rand X_m^i. Sei $q_m^i\colon E_m^i \to \bar{X}^i$ die Projektion und

$$u_m^i \in H^2(E_m^i, X_m^i) \cong \mathbb{Z}_2$$

die Orientierungsklasse dieses Bündels, siehe Sektion 5.7 in [S]. Weiter sei nun $m|n$, $i|j$ und $j|n$, und <u>alle diese Zahlen seien ungerade</u>. Außerdem sei

$$q_{m,n}^{i,j}\colon (E_m^i, X_m^i) \to (E_n^j, X_n^j)$$

die kanonische Projektion. Aus der Natürlichkeit der Orientierungsklassen folgt dann durch Einschränken auf eine Faser dieser Scheibenbündel die Gleichung

(1.2) $(q_{m,n}^{i,j})^*(U_n) = U_m$

denn $n/m = 1$ modulo 2. Für die zweiten Stiefel-Whitney Klassen $e_m^i \in H^2(\bar{X}^i)$ erhalten wir dann die entsprechende Gleichung

(1.3) $e_n^j | \bar{X}^i = e_m^i$

Damit definieren die

$$\{e_m^i | i \text{ teilt } m \text{ und } i,m \text{ ungerade}\}$$

nach (1.1) eine Kohomologieklasse $e \in H^2(\bar{X})$, die natürlich ist bezüglich Abbildungen, die Quotient von äquivarianten Abbildungen sind. Außerdem ist e die zweite Stiefel-Whitney Klasse des Bündels $X/\theta = X_1 \to \bar{X}$ falls $O(2)$ frei auf X operiert.

Sei nun Y eine offene, $O(2)$-invariante Teilmenge von X und sei

$$\tau_m^i\colon H_*(\bar{X}^i, \bar{Y}^i) \to H_{*+1}(X_m^i, Y_m^i)$$

die Transfer-Abbildung der zu dem S^1-Bündel $X_m^i \to \bar{X}^i$ assoziierten Thom-Gysin Sequenz. Aus (1.2) und der Definition von τ_m^i, siehe

Sektion 5.7 in [S], folgt dann

$$(1.4) \qquad (p^{i,j}_{m,n})_*\circ\tau^i_m = \tau^j_n\circ(\bar{p}^{i,j})_*$$

unter den obigen Voraussetzungen an i,j,m und n. Hierbei sind

$$p^{i,j}_{m,n}: (X^i_m, Y^i_m) \to (X^j_n, Y^j_n)$$

$$\bar{p}^{i,j}: (\bar{X}^i, \bar{Y}^i) \to (\bar{X}^j, \bar{Y}^j)$$

die kanonischen Abbildungen. Damit erhalten wir kommutative Diagramme von Thom-Gysin Sequenzen

$$(1.5) \qquad \begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to & H_*(X^i_m, Y^i_m) & \to & H_*(\bar{X}^i, \bar{Y}^i) & \xrightarrow{\cap e} & H_{*-2}(\bar{X}^i, \bar{Y}^i) & \xrightarrow{\tau^i_m} & H_{*-1}(X^i_m, Y^i_m) & \to & \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots \to & H_*(X^j_n, Y^j_n) & \to & H_*(\bar{X}^j, \bar{Y}^j) & \xrightarrow{\cap e} & H_{*-2}(\bar{X}^j, \bar{Y}^j) & \xrightarrow{\tau^j_n} & H_{*-1}(X^j_n, Y^j_n) & \to & \cdots
\end{array}$$

1.6 Lemma. Seien Y und Z offene, $O(2)$-invariante Teilmengen von X. Seien m und n ungerade und m ein Teiler von n. Dann ist

$$(p_{m,n})_*: H_*(Y_m, Z_m) \to H_*(Y_n, Z_n)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Aus der exakten Sequenz eines Paares und dem Fünfer-Lemma folgt, daß wir $Z = \emptyset$ annehmen können.

Wir zeigen zunächst, daß $(p_{m,n})_*$ surjektiv ist. Wegen der Bedingungen (i) und (ii) genügt es, die entsprechende Abbildung der Čech-Homologiegruppen zu betrachten. Nach (3.7.1) in [B] (und der darauf folgenden Bemerkung) gibt es eine Transfer-Abbildung

$$\tau_{m,n}: \check{H}_*(Y_n) \to \check{H}_*(Y_m)$$

mit $(p_{m,n})_* \circ \tau_{m,n} = (|\Gamma_n|/|\Gamma_m|)\cdot \mathrm{id} = \mathrm{id}$ modulo 2. Also ist $(p_{m,n})_*$ surjektiv.

Wir zeigen nun, daß $\tilde{p}_{m,n}: \tilde{Y}_m \to \tilde{Y}_n$ Isomorphismen der Homologiegruppen induziert. Wegen (i) und (ii) genügt es, dies für die Čech-Homologiegruppen zu beweisen. Nun ist Δ_m ein Normalteiler in S^1, und S^1/Δ_m operiert auf $\tilde{Y}_m$. Dabei entsteht $\tilde{Y}_n$ als Quotient einer Untergruppe Δ der Ordnung n/m von S^1/Δ_m. Weil S^1/Δ_m zusammenhängend ist, operiert jedes Element aus Δ als Identität auf $\check{H}_*(\tilde{Y}_m)$. Da n/m ungerade ist, folgt aus (3.7.2) in [B], daß $(\tilde{p}_{m,n})_*$ ein Isomorphismus ist.

Die Räume Y_m und Y_n sind die Orbiträume der durch θ auf $\tilde{Y}_m$ und $\tilde{Y}_n$ induzierten Involution. Diese Involution hat wegen (iii) keine Fixpunkte. Also sind $\tilde{Y}_m \to Y_m$ und $\tilde{Y}_n \to Y_n$ S^0-Bündel. Mit einer kleinen Diagrammjagd in dem kommutativen Diagramm der assoziierten Thom-Gysin Sequenzen erhält man nun die Behauptung. QED

Vermöge (1.6) und wegen (1.4) können wir in (1.5) die Gruppen $H_*(X^i_m, Y^i_m)$ und $H_*(X^j_n, Y^j_n)$ durch $H_*(X^i_1, Y^i_1)$ beziehungsweise $H_*(X^j_1, Y^j_1)$ ersetzen. Weil der direkte Limes von exakten Sequenzen exakt ist, erhalten wir mit (1.1) den folgenden Satz.

1.7 <u>Satz</u>. Auf X operiere $O(2)$ stetig, und die Bedingungen (i) und (ii) seien erfüllt. Sei Y eine offene, $O(2)$-invariante Teilmenge von X, die die abgeschlossene Menge

$$X_g = \{x \in X \mid I_x \text{ enthält ein Element gerader Ordnung}\}$$

enthält. Dann gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H_*(X/\theta, Y/\theta) \to H_*(\bar{X},\bar{Y}) \xrightarrow{\cap e} H_{*-2}(\bar{X},\bar{Y}) \xrightarrow{\tau} H_{*-1}(X/\theta, Y/\theta) \to \ldots$$

und es gilt

(i) $e \in H^2(\bar{X}-\bar{X}_g)$ ist natürlich bezüglich $O(2)$-äquivarianter Abbildungen $f\colon Z \to X$ mit $f^{-1}(X_g) = Z_g$. Falls $O(2)$ frei operiert, dann ist e die zweite Stiefel-Whitney Klasse des S^1-Bündels $X/\theta \to \bar{X}$

(ii) die Transfer-Abbildung τ ist die gewöhnliche Transfer-Abbildung der Thom-Gysin Sequenz von $X/\theta \to \bar{X}$ falls $O(2)$ frei operiert.

Wir wollen nun die Komposition $\tau \circ \bar{p}_*$ untersuchen, wobei $\bar{p}\colon (X/\theta, Y/\theta) \to (\bar{X},\bar{Y})$ die Projektion ist. Sei $\sigma\colon \Delta^k \to X$ ein k-Simplex. Eine geeignete Triangulierung von $\Delta^\infty \times S^1$ liefert uns dann eine $(k+1)$-Kette

$$S^1\cdot\sigma\colon \Delta^{k+1} \times S^1 \to X, \quad (x,\gamma) \to \gamma\sigma(x).$$

Damit erhalten wir eine Abbildung

$$S^1\cdot: H_*(X,Y) \to H_{*+1}(X,Y)$$

1.8 Satz. Die Voraussetzungen seien wie in (1.7). Dann gilt

$$\tau\bullet\bar{p}_* = q_*\bullet S^1.$$

wobei $q:(X,Y) \to (X/\theta, Y/\theta)$ die Projektion ist.

Beweis. Da X_g in Y enthalten ist, können wir nach Ausschneidung annehmen, daß Bedingung (iii) erfüllt ist, also daß $X_g = \emptyset$ ist.

Für $(x,\gamma) \in X \times S^1$ und $\delta \in O(2)$ sei

$$\delta(x,\gamma) = \begin{cases} (x, \delta\gamma) & \text{falls } \delta \in S^1 \\ (\theta x, \delta\gamma\theta) & \text{falls } \delta \notin S^1 \end{cases}$$

Diese Operation von $O(2)$ auf $X \times S^1$ ist frei weil Bedingung (iii) gilt. Außerdem ist die Abbildung

$$X \times S^1 \to X; \quad (x,\gamma) \to \gamma x$$

äquivariant. Da eine Homologieklasse h von (X,Y) unter dieser Abbildung Bild der Homologieklasse $h \times \{pt\}$ in $(X,Y) \times S^1$ ist, und da die zu beweisende Gleichung natürlich ist bezüglich äquivarianter Abbildungen, genügt es, Homologieklassen der Form $h \times \{pt\}$ in $(X,Y) \times S^1$ zu betrachten. Den Rest des Beweises überlassen wir dem Leser. QED.

Abschnitt 2. Die Injektivität der Alber-Abbildung

Der freie Schleifenraum ist vermöge der Auswertung

$$ev: \quad \Lambda \to S^n; \qquad c \to c(0)$$

ein Faserraum über S^n. Die Faser über einem Punkt x ist der Schleifenraum Ω in x. Die Faserung hat als Schnitt die Abbildung

$$s: S^n \to \Lambda; \qquad y \to y = \text{Punktkurve in } y$$

Daraus folgt

$$\pi_i(\Lambda) = \pi_i(\Omega) \oplus \pi_i(S^n) = \pi_{i+1}(S^n) \oplus \pi_i(S^n)$$

Also ist $\pi_i(\Lambda) = 0$ für $i \leq n-2$. Ferner folgt, daß die Abbildung $\pi_n(S^n) \to \pi_{n-1}(\Lambda)$, die der Homotopieklasse einer differenzierbaren Abbildung

$$f: (I^n, \partial I^n) \to (M, x)$$

die Homotopieklasse der Abbildung

$$F: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (\Lambda, x), \qquad F(y)(t) = f(y,t)$$

zuordnet, ein Isomorphismus ist. Also ist auch die Komposition

$$(2.1) \qquad H: \pi_n(S^n) \otimes \mathbb{Z}_2 \to H_{n-1}(\Lambda)$$

mit dem Hurewicz-Homomorphismus ein Isomorphismus.

Seien nun Λ_π und U die Menge aller c aus Λ mit $e^{i\pi}c = c$ beziehungsweise

$$d(c(t),c(t+1/2)) < \varepsilon \quad \forall t \in S^1$$

wobei $\varepsilon > 0$ kleiner als der Injektivitätsradius der gegebenen Riemannschen Metrik auf S^n sei. Dann ist U eine offene, $O(2)$-invariante Teilmenge von Λ, die die abgeschlossene, $O(2)$-invariante Teilmenge Λ_π von Λ als äquivarianten Deformationsretrakt enthält. Die Abbildung

$$Q\colon \Lambda \to \Lambda_\pi; \qquad c \to c^2$$

ist ein Homöomorphismus. Insbesondere ist $\pi_i(\Lambda_\pi) = 0$ für $i \leq n-2$. Wesentlich im Beweis der Injektivität der Alber-Abbildung ist der folgende Hilfssatz.

2.2 __Lemma__. Die durch die Inklusion induzierte Abbildung

$$H_{n-1}(\Lambda) \to H_{n-1}(\Lambda,\Lambda_\pi)$$

ist ein Isomorphismus.

__Beweis__. Weil $H_i(\Lambda_\pi) = 0$ ist für $i \leq n-2$ genügt es, die Injektivität zu beweisen. Sei also h in $H_{n-1}(\Lambda)$ im Bild von $H_{n-1}(\Lambda_\pi) \to H_{n-1}(\Lambda)$. Weil die oben definierte Abbildung Q ein Homöomorphismus ist, gibt es nach (2.1) dann eine Abbildung

$$f\colon (I^n,\partial I^n) \to (M,x)$$

so daß $h = Q_*(H(f))$ ist. Dann ist aber

$$ev_*(S^1 h) = ev_*(S^1 Q_*(H(f))) = 2\ ev_*(S^1 H(f)) = 0$$

modulo $\mathbb{Z}_2$. Nun ist $ev_* \circ S^1 \circ H$ der Hurewicz-Homomorphismus, also $ev_* \circ S^1$ ein Isomorphismus nach (2.1). Daher folgt $h = 0$. QED

2.3 Lemma. Die durch die Inklusionen induzierten Abbildungen

$$H_*(\Lambda - \Lambda_\theta) \to H_*(\Lambda) \quad \text{und}$$
$$H_*(\Lambda - \Lambda_\theta, U - \Lambda_\theta) \to H_*(\Lambda, U)$$

sind Isomorphismen, wobei $\Lambda_\theta = \{c \in \Lambda \mid I_c \not\subset S^1\}$. Insbesondere gilt

$$H_i(\Lambda - \Lambda_\theta, U - \Lambda_\theta) = 0 \quad \text{für} \quad i \leq n-2.$$

Beweis. Wie in Lemma (2.2) aus [BTZ] beweist man, daß für jede offene Menge V aus Λ die durch die Inklusion induzierte Abbildung $H_*(V - \Lambda_\theta) \to H_*(V)$ ein Isomorphismus ist. QED

Jede geschlossene Geodätische der gegebenen Riemannschen Metrik hat Länge $\geq 2\varepsilon$. Also kann man π^δ mit dem negativen Gradientenfluß φ_t der Energie auf π^0 retrahieren falls $\delta \in (0, \varepsilon^2)$, siehe (1.4.15) in [K]. Wie in [BTZ] sei

$$V = \{c \in \Lambda \mid E \circ \varphi_t(c) \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty\}$$

Dann ist V offen und $O(2)$-invariant. Außerdem sind Π^δ und Π^0 Deformationsretrakte von $\bar{V} = V/O(2)$. $\bar{V}$ enthält $\Pi_\theta = \Lambda_\theta/O(2)$ weil es keine θ-invarianten geschlossenen Geodätischen gibt.

2.4 Lemma. Die durch die Inklusion induzierte Abbildung

$$H_*(\Pi - \Pi_\theta, \Pi^\delta - \Pi_\theta) \to H_*(\Pi, \Pi^\delta)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Der negative Gradientenfluß der Energie retrahiert $\bar{V}-\Pi_\theta$ auf $\Pi^\delta-\Pi_\theta$. Damit erhalten wir Isomorphismen

$$H_*(\Pi-\Pi_\theta,\Pi^\delta-\Pi_\theta) \to H_*(\Pi-\Pi_\theta,\bar{V}-\Pi_\theta) \to H_*(\Pi,\bar{V})$$

und $\quad H_*(\Pi,\Pi^\delta) \to H_*(\Pi,\bar{V})$. QED

Nach Wahl von δ ist Π^δ in $\bar{U}$ enthalten. Sei nun $\alpha \in (0,2\pi)$ so klein, daß die Menge der Kreise Γ^α in Π^δ enthalten ist. Kein Element aus Γ trifft $\Pi_g = \Lambda_g/O(2) = (\Lambda_\pi \cup \Lambda_\theta)/O(2)$. Weil

$$(\Pi-\Pi_g,\bar{U}-\Pi_g) \to (\Pi-\Pi_\theta,\bar{U}-\Pi_\theta)$$

eine Ausschneidungsabbildung ist, folgt aus (2.4) die Injektivität der Alber-Abbildung falls

$$I_*: H_*(\Gamma,\Gamma^\alpha) \to H_*(\Pi-\Pi_g,\bar{U}-\Pi_g)$$

injektiv ist, wobei I die Inklusion ist. Nun gilt $w_2 = J^*(e)$, wobei $J: \Gamma \to \Pi-\Pi_g$ die Inklusion ist und $e \in H^2(\Pi-\Pi_g)$ die Kohomologieklasse aus (1.7) ist. Außerdem ist w_1 im Bild vom J^*, weil w_1 die (erste) Stiefel-Whitney Klasse von $A/S^1 \to \Gamma$ ist und θ eine freie Involution auf $(\Lambda-\Lambda_g)/S^1$ induziert. Es bleibt also nur noch $I_*\{0,0\} \neq 0$ zu zeigen.

Nun ist klar, daß $I_*\{0,0\}$ unter den Isomorphismen

$$\pi_n(S^n) \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{H} H_{n-1}(\Lambda) \to H_{n-1}(\Lambda,U) \leftarrow H_{n-1}(\Lambda-\Lambda_\theta,U-\Lambda_\theta)$$

der Projektion des Bildes des Erzeugenden aus $\pi_n(M) \otimes \mathbb{Z}_2$ entpsricht. Es genügt also zu zeigen, daß

$$H_*(\Lambda-\Lambda_\theta, U-\Lambda_\theta) \to H_*(\Pi-\Pi_\theta, \tilde{U}-\Pi_\theta)$$

injektiv ist. Zunächst folgt aus der Thom-Gysin Sequenz des S^O-Bündels $\Lambda-\Lambda_\theta \to (\Lambda-\Lambda_\theta)/\theta$, daß

$$H_i((\Lambda-\Lambda_\theta)/\theta, (U-\Lambda_\theta)/\theta) = 0, \quad i \le n-2$$

und daß

$$H_{n-1}(\Lambda-\Lambda_\theta, U-\Lambda_\theta) \to H_{n-1}((\Lambda-\Lambda_\theta)/\theta, (U-\Lambda_\theta)/\theta)$$

injektiv ist. Die Behauptung folgt nun mit (1.7).

Literaturverzeichnis

[Al] S.I. Alber: On Periodicity Problems in the Calculus of Variations in the Large. Amer. Math. Soc. Translations (2) 14 (1960), 170-172

[An] D.V. Anosov: Certain Homotopies in the Space of Closed Curves. Math. USSR-Izv. 17 (1981), 423-453

[B] G.E. Bredon: Introduction to Compact Transformation Groups. Academic Press, New York 1972

[BTZ] W. Ballmann, G. Thorbergsson, W. Ziller: Existence of Closed Geodesics on Positively Curved Manifolds. J. Differential Geometry 18 (1983), 221-252

[K] W. Klingenberg: Lectures on Closed Geodesics. Grundlehren der math. Wissenschaften 230, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1978

[S] E.H. Spanier: Algebraic Topology. Mc Graw-Hill, New York 1966

TEIL III. ÜBER KÜRZESTE GESCHLOSSENE GEODÄTISCHE

In jeder nicht trivialen freien Homotopieklasse auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M existieren Kurven kleinster Länge. Diese sind bis auf ihre Parametrisierung geschlossene Geodätische. Daraus folgt die Existenz einer geschlossenen Geodätischen auf M wenn M nicht einfach zusammenhängend ist.

Das Problem der Existenz einer geschlossenen Geodätischen wird schwieriger, wenn wir $\pi_1(M) = 0$ voraussetzen. Nach einem ersten Versuch Poincarés [P] für konvexe (analytische) Metriken auf S^2, der erst unlängst von Croke zu einem Beweis vervollständigt werden konnte [C], war es Birkhoff, dem als erster der Existenzbeweis für beliebige (analytische) Metriken auf S^2 gelang, siehe Abschnitt 17 in [B1]. In der Einleitung zu [B1] beschreibt er seine Beweismethode, die sogenannte Minimaxmethode, wie folgt: "There is a minimum length of closed string, constrained to lie in a given closed surface of genus 0, which may be slipped over that surface; in some intermediate position the string will be taut and will then coincide with a closed geodesic." In [B2] bemerkt Birkhoff dann, daß die Minimaxmethode sinngemäß auf alle Riemannschen Mannigfaltigkeiten angewandt werden kann, die homöomorph zu S^n, $n \geq 2$, sind.

Wir formalisieren nun die oben beschriebene Beweismethode: Sei M homöomorph zu S^n, $n \geq 2$, und sei $\Lambda = \Lambda(M)$ wie in [K1] der freie Schleifenraum von M. Das Energiefunktional

$$E\colon \Lambda \to \mathbb{R};\quad E(c) = \int \langle\dot{c},\dot{c}\rangle/2$$

hat die Punktkurven Λ^0 und die geschlossenen Geodätischen als kritische Punkte. Das Erzeugende h in $\pi_n(M)$ stellen wir uns als differenzierbare Abbildung

$$f\colon (I^n,\partial I^n) \to (M,pt)$$

repräsentiert vor, wobei I das Einheitsintervall bezeichnet. Zu f assoziieren wir die Abbildung

$$F\colon (I^{n-1},\partial I^{n-1}) \to (\Lambda,\Lambda^0);\quad F(x)(t) = f(x,t)$$

Sei H die Homotopieklasse von F. Es ist leicht zu sehen, daß $\pi_i(\Lambda,\Lambda^0) = 0$ ist für $i < n-1$ und daß H ein Erzeugendes von $\pi_{n-1}(\Lambda,\Lambda^0) \cong \mathbb{Z}$ ist, vergleiche (2.1.5) in [K1].

Wir setzen nun

$$\kappa = \kappa(H) = \inf\{\sup E\circ G \mid G \in H\}$$

Wir nennen κ das <u>kritische Niveau</u> von H. Weil H nicht trivial ist folgt $\kappa > 0$. Es gibt geschlossene Geodätische der Energie κ. Genauer gilt sogar, daß es zu jeder Umgebung U der Menge K der geschlossenen Geodätischen der Energie κ einen Repräsentanten G aus H gibt mit

$$\operatorname{Im}(G) \subset U \cup \Lambda^{\kappa-},$$

wobei $\Lambda^{\kappa-} = \{c \in \Lambda | E(c) < \kappa\}$, siehe (2.1.2) in [K1].

Wir sagen, daß H an der Teilmenge K' von K <u>hängen bleibt</u>, falls es zu jeder Umgebung U von K' einen Repräsentanten G aus H gibt mit

$$\mathrm{Im}(G) \subset U \cup \Lambda^{\kappa-} .$$

Im allgemeinen gibt es keine ausgewählte Teilmenge K' von K, wie etwa eine wohlbestimmte "kleinste", an der H hängen bleibt. Falls M beispielweise die Standardsphäre mit konstanter Krümmung ist, dann bleibt H an jedem Großkreis hängen.

Wir stellen nun die Frage, unter welchen Bedingungen H an einer kürzesten geschlossenen Geodätischen hängenbleibt. Das hierzu metrische Voraussetzungen notwendig sind, zeigt das Beispiel der Stundenglasfläche. Aber selbst positive Schnittkrümmung ist keine hinreichende Bedingung. Es gibt nämlich Metriken auf S^3, die <u>Berger-Beispiele</u>, deren Schnittkrümmung K positiv ist und deren kürzeste geschlossene Geodätische Länge $\leq 2\pi/\sqrt{\max K}$ haben, siehe Seite 70 in [CE]. Mit Argumenten wie in Klingenbergs Beweis der Abschätzung des Injektivitätsradius' in Dimensionen ≥ 3 folgt aber, daß $\kappa(H) \geq 2\pi^2/\max K$.

In Theorem (4.3) in [BTZ 1] wird nun bewiesen, daß H an jeder kürzesten geschlossenen Geodätischen hängen bleibt falls M homöomorph ist zu S^2 und falls die Krümmung K von M die Ungleichung $1/4 \leq K \leq 1$ erfüllt. Die Methode in [BTZ 1] läßt sich nicht in höheren Dimensionen anwenden. Unser Hauptergebnis ist der folgende Satz.

Satz. Falls M homöomorph ist zu S^n, $n \geq 2$, und falls die Schnittkrümmung K von M die Ungleichung $1/4 \leq K \leq 1$ erfüllt, dann bleibt H an jeder kürzesten geschlossenen Geodätischen hängen.

Nun gilt auf M ja die Abschätzung

(1) (Klingenberg) $i(M) \geq \pi$

wobei $i(M)$ der Injektivitätsradius von M ist, siehe [KS] oder [CG]. Alle geschlossenen Geodätischen auf M haben also Länge $\geq 2\pi$. Falls also $\delta = \min K > 1/4$, dann ist

$$L(c) > \pi/\sqrt{\delta}$$

für jede geschlossene Geodätische c, wobei L das Längenfunktional ist. Die letzte Ungleichung gilt jedoch auch im Falle $\delta = 1/4$, denn nach einem Satz von Tsukamoto [T] gilt

(2) $K \equiv 1$ falls M eine geschlossene Geodätische der Länge 2π hat.

Damit folgt aus dem Vergleichssatz von Morse-Schoenberg, siehe (2.6.2) in [K2] oder (4.13) in [CE], daß der Index einer geschlossenen Geodätischen zumindest $n-1$ ist. Nun hat eine geschlossene Geodätische c mit Index $\geq n$ und Energie κ eine offene Umgebung U, so daß

$$H_i(U, U^{\kappa-}) = 0 \quad \text{für} \quad i < n,$$

wobei $U^{\kappa-} = U \cap \Lambda^{\kappa-}$, siehe Anhang. Aus der Ausschneidungseigenschaft folgt dann

$$H_i(U \cup \Lambda^{\kappa-}, \Lambda^{\kappa-}) = 0 \quad \text{für} \quad i < n.$$

Falls also auf M eine kürzeste geschlossene Geodätische mit Index $\geq n$ existiert, dann gibt es einen Zykel z in der durch H definierten Homologieklasse in Λ modulo Λ^0, so daß

$$|z| \subset \Lambda^{\kappa-}, \quad \kappa = \kappa(H) = E(c).$$

Weil es aber keine geschlossenen Geodätischen mit Energie $< \kappa$ gibt, retrahiert der negative Gradientenfluß der Energie $\Lambda^{\kappa-}$ auf Λ^{0}, siehe (1.4.15) in [K1]. Damit erhalten wir das

Korollar 1. Sei M wie im Satz. Dann hat jede kürzeste geschlossene Geodätische auf M Index $n-1$.

Aus Theorem (3.3) in [BTZ 2] und Korollar 1 folgt dann das

Korollar 2. Sei M wie im Satz, und sei c eine kürzeste geschlossene Geodätische auf M. Dann ist c nicht hyperbolisch. Falls $\delta = \min K \geq 9/16$, dann sind sogar alle Eigenwerte der linearen Poincaré-Abbildung von c vom Betrag 1.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes. Nach dem Vergleichssatz von Morse-Schoenberg haben geschlossene Geodätische der Länge $> 2\pi/\sqrt{\delta}$ Index $\geq 2(n-1)$. Also gilt

$$\pi_i(\Lambda, \Lambda^{\alpha-}) = 0 \quad \text{für} \quad i < 2(n-1)$$

für jeden regulären Wert $\alpha > 2\pi^2/\delta$ von E, vergleiche Lemma (22.5) in [M]. Es folgt also

(3) $\quad \kappa(H) \leq 2\pi^2/\delta \leq 8\pi^2.$

Insbesondere hat eine kürzeste geschlossene Geodätische auf M Länge $\leq 2\pi/\sqrt{\delta} \leq 4\pi$.

Wir benützen die folgende Konsequenz des Winkelvergleichssatzes von Topogonov [CE],[K2].

(4) Sei (g_1,g_2,g_3) ein geodätischen Dreieck auf M. Seien g_1 und g_2 minimal, und sei $L(g_3) \leq \pi/\sqrt{\delta}$. Dann ist

$$L(g_1) + L(g_2) + L(g_3) \leq 2\pi/\sqrt{\delta}.$$

Zum Beweis von (4) bemerken wir, daß (g_1,g_2,g_3) den Voraussetzungen des Winkelvergleichssatzes genügt falls

$$L(g_1) + L(g_2) \geq L(g_3).$$

Wir beweisen nun den Satz zunächst im Falle $\delta = \min K > 1/4$, weil die Beweisidee im Falle $\delta = 1/4$ wegen technischer Details nicht so klar hervortritt. Außerdem beweisen wir die etwas stärkere Behauptung:

(5) Sei M wie im Satz und $\delta > 1/4$. Sei c eine kürzeste geschlossene Geodätische auf M. Dann gibt es einen Repräsentanten G in H, so daß

$$\mathrm{Im}(G) \subset \{c\} \cup \Lambda^{\kappa-}, \ \kappa = \kappa(H) = E(c).$$

Sei c: $[0,L] \to M$ eine geschlossene Geodätische auf M mit

$$L = L(c) \leq 2\pi/\sqrt{\delta} < \pi.$$

Nach (1) ist $L > \pi/\sqrt{\delta}$. Setze $g_3 = c|[0,\pi/\sqrt{\delta}]$. Für einen

Einheitsvektor v in $c(0)$ sei g_v die durch v bestimmte Geodätische. Wegen (1) und (4) gibt es ein eindeutiges $t = t(v)$ in $(0,\pi)$, so daß

$$t = d(g_v(t), c(0)) = d(g_v(t), c(\pi/\sqrt{\delta})),$$

und t hängt stetig von v ab, vergleiche Lemma (6.4) in [CE]. Seien nun $g_1(v)$ und $g_2(v)$ die (wegen (1)) eindeutig bestimmten minimalen geodätischen Segmente von $c(0)$ nach $g_v(t(v))$, parametrisiert auf $[0,\pi/2\sqrt{\delta}]$, beziehungsweise $g_v(t(v))$ nach $c(\pi/\sqrt{\delta})$, parametrisiert auf $[\pi/2\sqrt{\delta}, \pi/\sqrt{\delta}]$. Wähle einen Homöomorphismus

$$f_0: (\tilde{I}^{n-1}/\partial\tilde{I}^{n-1}, \partial\tilde{I}^{n-1}) \to (S_{c(0)}M, -\dot{c}(0))$$

mit $f_0(1/2,\ldots,1/2) = \dot{c}(0)$. Hierbei ist S_pM die Einheitssphäre im Punkte $p \in M$ und $\tilde{I} = [1/4, 3/4]$. Erkläre $F_0: \tilde{I}^{n-1} \to \Lambda$ durch

$$F_0(x) = g_1(f_0(x)) * g_2(f_0(x)) * (c|[\pi/\sqrt{\delta}, L]).$$

Unter F_0 wird $\partial\tilde{I}^{n-1}$ bis auf die Parametrisierung in die Kurve

$$(c|[\pi/\sqrt{\delta}, L])^{-1} * (c|[\pi/\sqrt{\delta}, L])$$

abgebildet, denn

$$L - \pi/\sqrt{\delta} \leq \pi/\sqrt{\delta} < \pi.$$

Die Nullhomotopie

$$(c|[t,L])^{-1} * (c|[t,L]), \quad \pi/\sqrt{\delta} \le t \le L$$

dieser Kurve benützen wir nun, um F_0 zu einer Abbildung F_1 auf I^{n-1} auszudehnen, so daß ∂I^{n-1} unter F_1 auf die Punktkurve $c(0)$ abgebildet wird. Der Grad der Abbildung

$$f_1 : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \times S^1 \to (M, c(0)), \quad f_1(x,t) = F_1(x)(t)$$

ist ± 1, wie man leicht an den Punkten $(1/2, \ldots, 1/2, \varepsilon)$ überprüft. Also repräsentiert F_1 eine der Homotopieklassen $\pm H$. Die Kurven im Bild von F_1 haben Energie $\le E(c)$ wegen (4). Alle außer c haben einen Knick in $c(0)$. Wenn wir also den negativen Gradientenfluß der Energie auf F_1 anwenden, dann erhalten wir einen Repräsentanten G aus H mit

$$\mathrm{Im}(G) \subset \{c\} \cup \Lambda^{L^2/2-} .$$

Damit folgt (5).

Wir beschreiben nun die Modifikationen, die im Falle $\delta = 1/4$ erforderlich sind. Wir können annehmen, daß die Schnittkrümmung K von M nicht konstant ist. Nach einem Satz von Tsukamoto [T] gibt es auf M dann keine geschlossene Geodätische der Länge 4π; siehe hierzu auch Bemerkung (b) nach (1.7) in [BTZ 1]. Wegen (2) und (3) hat eine kürzeste geschlossene Geodätische auf M daher Länge in $(2\pi, 4\pi)$.

Sei nun $c:[0,L] \to M$ eine geschlossene Geodätische der Länge L in $(2\pi,4\pi)$. Wegen (1) kann c keine Doppelpunkte haben. Außerdem ist

$$\varepsilon_0 = (L-2\pi)/2 < \pi.$$

Wegen (1) und (4) gibt es für jedes v in $S_{c(0)}M$ ein eindeutig bestimmtes $t = t(v)$ in $(0,\pi]$ mit

$$t = d(g_v(t),c(0)) = d(g_v(t),c(2\pi))$$

und t hängt stetig von v ab. Wir können aber jetzt nicht folgern, daß es eine eindeutige minimale Geodätische von $g_v(t(v))$ nach $c(2\pi)$ gibt weil wir $t(v) = \pi$ nicht ausschließen können.

Nach Gromov [G] heißt q kritischer Punkt der Distanzfunktion

$$r \to d(p,r)$$

falls es zu jedem Einheitsvektor v in q einen Einheitsvektor w in q gibt mit $\langle v,w\rangle \geq 0$, der tangential an eine minimale Geodätische von q nach p ist. Nach dem ersten Teil des Beweises von Lemma (4.3) in [BTZ 3] haben diese Funktionen keine kritischen Werte im Bereich $(0,\pi]$. Es folgt nun leicht (benütze eine Partition der Eins), daß es ein differenzierbares Vektorfeld X auf

$$V = \{q \in M | 0 < d(c(2\pi),q) < \pi+\beta\}$$

gibt, wobei $\beta > 0$ eine genügend kleine Konstante ist, so daß die folgendendrei Eigenschaften gelten:

(a) $\|X(q)\| = 1$ für alle $q \in V$

(b) X ist tangential an die minimale Geodätische von q nach $c(2\pi)$ falls $d(q,c(2\pi)) \leq \varepsilon_0$

(c) $d(\psi_s(q),c(2\pi))$ ist strikt monoton fallend, wobei ψ_s der Fluß von X ist.

Sei nun $U(\varepsilon)$ die ε-Umgebung von c in Λ. Wähle ein $\varepsilon_1 > 0$ mit

$$\varphi_1(U(\varepsilon_1)) \subset U(\varepsilon)$$

wobei φ_s der negative Gradientenfluß der Energie ist. Betrachte für jedes kleine $\alpha > 0$ und für alle $v \in S_{c(0)}M$ die Kurven

$$c_v = c_v(\alpha) = g_1(v) * h(v) * g_2(v)$$

Hierbei sei

$g_1(v) = g_v | [0,t(v)]$, parametrisiert auf $[0,\pi]$

$h(v) = (s \to \psi_{s-\pi}(g_v(t(v))); \pi \leq s \leq \pi+\alpha)$

und $g_2(v)$ die (wegen (1) und (c)) eindeutige, auf $[\pi+\alpha,2\pi]$ parametrisierte Minimale von $\psi_\alpha(g_v(t(v))$ nach $c(2\pi)$ ist. Es gibt ein $\varepsilon_2 > 0$, so daß für alle genügend kleinen $\alpha > 0$ und alle $v \in S_{c(0)}M$ gilt

(6) entweder $c_v * (c|[2\pi,L])$ ist in $U(\varepsilon_1)$ oder

$$\max\{\sphericalangle(\dot c_v(0),\dot c(0)),\ \sphericalangle(\dot c_v(2\pi),\dot c(2\pi))\} > \varepsilon_2$$

Falls nämlich $v_n \to v$ und $\alpha_n \to 0$, dann konvergiert $c_{v_n}(\alpha_n)$ gegen eine höchstens einmal gebrochene Geodätische g der Länge $\leq 2\pi$ von $c(0)$ nach $c(2\pi)$.

Nun folgt leicht aus (a), daß die Energie von $c_v * (c|[2\pi,L])$ die Energie von c nur um beliebig wenig überschreiten kann wenn wir $\alpha > 0$ genügend klein wählen. Also gilt wegen (6) für $\alpha > 0$ genügend klein

$$E(\varphi_1(c_v * (c|[2\pi,L]))) < E(c) = L^2/2$$

falls $c_v * (c|[2\pi,L])$ nicht in $U(\varepsilon_1)$ enthalten ist.

Aus (b) folgt, daß c_{-v} bis auf die Parametrisierung mit $(c|[2\pi,L])^{-1}$ übereinstimmt. Wir können nun wie im ersten Teil des Beweises eine Abbildung $F_1 \in H$ konstruieren, so daß $G = \varphi_1 \circ F_1$ die im Satz behaupteten Eigenschaften besitzt.

Bemerkungen. (a) Der Beweis kann nach einer kleinen Modifikation auch dazu benützt werden, die analoge Aussage für geodätische Schleifen zu zeigen: statt $g_3 = c|[0,\pi/\sqrt{\delta}]$ wählt man $g_3 = c|[\varepsilon,\pi/\sqrt{\delta}+\varepsilon]$ für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$.

(b) Unter den Voraussetzungen des Satzes existiert keine geschlossene Geodätische auf M mit Länge in $(2\pi/\sqrt{\delta}, 4\pi)$, siehe (1.7) in [BTZ 1]. Mit geometrischen Argumenten wie in der Bemerkung nach dem Beweis von Satz (1.5) in [BTZ 1] folgt für $\delta \geq 4/9$, daß die Klasse h_3 bzw. $\tilde h_3$ aus Abschnitt 4 in [BTZ 3] an der Menge der geschlossenen Geodätischen hängenbleibt, deren Länge maximal $\leq 2\pi/\sqrt{\delta}$ ist, aber nicht an einer Teilmenge derselben.

Literaturverzeichnis

[BTZ 1] W. Ballmann, G. Thorbergsson, W. Ziller: Some existence theorems for closed geodesics. Comment. Math. Helvetici (1983)

[BTZ 2] W. Ballmann, G. Thorbergsson, W. Ziller: Closed geodesics on positively curved manifolds. Annals of Math. 116 (1982), 213-247

[BTZ 3] W. Ballmann, G. Thorbergsson, W. Ziller: Existence of Closed Geodesics on Positively Curved Manifolds. J. Differential Geometry 18 (1983), 221-252

[B1] G.D. Birkhoff: Dynamical systems with two degrees of freedom. Transactions Amer. Math. Soc. 18 (1920), 199-300

[B2] G.D. Birkhoff: Dynamical Systems. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Volume IX. Amer. Math. Soc., New York 1927

[C] C. Croke: Poincaré's Problem and the Length of the Shortest Closed Geodesic on a Convex Hypersurface. Vorabdruck, Philadelphia 1982

[CE] J. Cheeger, D.G. Ebin: Comparison Theorems in Riemannian Geometry. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1975

[CG] J. Cheeger, D. Gromoll: On the Injectivity Radius of 1/4-Pinched Manifolds. J. Differential Geometry 15 (1980), 437-442

[G] M. Gromov: Curvature, diameter and Betti numbers. Comment. Math. Helvetici 56 (1981), 179-195

[K1] W. Klingenberg: Lectures on Closed Geodesics. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 230, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1978

[K2] W. Klingenberg: Riemannian Geometry. De Gruyter, Berlin-New York 1982

[KS] W. Klingenberg, T. Sakai: Injectivity radius estimate for 1/4-pinched manifolds. Archiv d. Math. 34 (1980), 371-376

[M] J. Milnor: Morse Theory. Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1963

[P] H. Poincaré: Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. Transactions Amer. Math. Soc. 6 (1905), 237-274

[T] Y. Tsukamoto: Closed Geodesics on Certain Riemannian Manifolds of Positive Curvature. Tôhoku Math. J. 18 (1966), 138-143

Anhang. Über die lokale Homologie kritischer Punkte

Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $f: N \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $p \in N$ ein kritischer Punkt von f mit Index λ und Nullität ν. Falls $\dim(N) = \infty$ machen wir die üblichen weiteren Voraussetzungen [GM]. Nach dem verallgemeinerten Morse-Lemma, siehe Seite 75 in [T] oder Lemma 1 in [GM], kann man um p Koordinaten (x,y,z), $x = (x_1,\ldots,x_\lambda)$, $z = (z_1,\ldots,z_\nu)$ einführen, so daß $p = (0,0,0)$ und

$$f(x,y,z) = -x^2+y^2+g(z).$$

wobei dann also $z = 0$ ein total entarteter kritischer Punkt der Funktion g ist. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(p) = g(0) = 0$.

Wir nehmen an, daß eine gegen Null konvergierende Folge $\delta_n < 0$ von regulären Werten von f existiert. Falls N endlichdimensional ist gilt diese Annahme nach dem Satz von Sard.

Wähle nun $\varepsilon > 0$ so klein, daß

$$U = \{(x,y,z) \mid x^2 \leq \varepsilon^2, y^2 \leq \varepsilon^2 \text{ und } z^2 \leq \varepsilon^2\}$$

im Koordinatenbereich enthalten ist und so daß

$$g(z) \geq -\varepsilon^2/2 \quad \text{für alle } z \text{ mit } z^2 \leq \varepsilon^2.$$

Wähle n so daß $\delta = \delta_n > -\varepsilon^2/2$. Wir behaupten, daß eine stetige

Abbildung $D: U \times I \to U$ existiert mit

$$D(x,0) = x \quad \text{und} \quad f(D(x,t)) \leq f(x)$$

die $U^\delta = \{q \in U | f(q) \leq \delta\}$ in

$$W^\delta = \{(x,y,z) \in U | y = 0 \quad \text{und} \quad (x^2 = \varepsilon^2 \quad \text{oder} \quad g(z) \leq \delta)\}$$

deformiert. Zunächst können wir die y-Koordinate eines Punktes linear gegen Null deformieren. Wir können also die y-Koordinate vernachlässigen. Falls $g(z) \leq \delta$ ist, dann sei $D(x,z,t) = (x,z)$. Falls $g(z) > \delta$ ist, dann muß $x \neq 0$ sein wenn $f(x,z) \leq \delta$ ist. Wir möchten nun solche (x,z) einfach radial in $(\varepsilon x/\|x\|,z)$ deformieren. Falls wir dies für alle solche (x,z) tun würden, dann wäre D nicht stetig in den Punkten (x,z) mit $g(z) = \delta$.

Weil nun δ ein regulärer Wert von f ist muß es auch ein regulärer Wert von g sein. Seien

$$V = \{z | z^2 \leq \varepsilon^2\} \quad \text{und} \quad V^\delta = \{z \in V | g(z) \leq \delta\}$$

Damit ist also ∂V^δ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von V. Mit Hilfe des Gradientenflußes von g kann man in einer Tubenumgebung T vom ∂V^δ Koordinaten (u,s), $u \in \partial V^\delta$, $s \in [-1,1]$, einführen mit $g(u,s) < g(u,\tilde{s})$ für $s < \tilde{s}$. Wir deformieren nun die (x,z) mit $g(z) > \delta$, $z \notin T$ und $f(x,z) \leq \delta$ radial in $(\varepsilon x/\|x\|,z)$. Falls aber $g(z) > \delta$ und $z \in T$, $z = (u,s)$, dann deformieren wir (x,s,u) entlang des Strahls durch $(0,1,u)$ und

(x,s,u). Dies erklärt D.

Es folgt, daß $(W,W^\delta) \to (U,U^\delta)$ einen Isomorphismus der Homologiegruppen induziert, wobei

$$W = \{(x,y,z) \in U \mid y = 0\}$$

ist. Nun ist (W,W^δ) das Produkt $(V,V^\delta) \times (D,\partial D)$ wobei $D = \{x \mid x^2 \leq \varepsilon^2\}$ ist. Also ist

$$H_i(U,U^\delta) = 0 \quad \text{für} \quad i < \lambda.$$

Weil $\lambda+\nu$ die Dimension von W ist folgt auch

$$H_i(U,U^\delta) = 0 \quad \text{für} \quad i > \lambda+\nu.$$

Sei nun $U^- = \{q \in U \mid f(q) < 0\}$. Dann ist

$$H_*(U,U^-) = \lim_{\delta \to 0} H_*(U,U^\delta)$$

Damit erhalten wir

$$H_i(U,U^-) = 0 \quad \text{falls} \quad i < \lambda \quad \text{oder} \quad i > \lambda+\nu.$$

[GM] D. Gromoll, W. Meyer: On Differentiable Functions with Isolated Critical Points. Topology 8 (1969), 361-369

[T] R. Thom: Stabilitè structurelle et morphogènèse. Benjamin, Reading, Massachusetts 1972