BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN
Herausgeber:
E. BRIESKORN, J. FREHSE, ST. HILDEBRANDT
F. HIRZEBRUCH, W. KLINGENBERG, R. LEIS,
I. LIEB, E. PESCHL, H. UNGER, W. VOGEL

Nr. 113

Werner Ballmann

Einige neue Resultate über Mannigfaltigkeiten nicht positiver Krümmung

BONN 1978

EINIGE NEUE RESULTATE ÜBER MANNIGFALTIGKEITEN NICHT POSITIVER KRÜMMUNG

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu

Bonn

vorgelegt von

Werner Ballmann

aus Bonn

Bonn 1978

Referent :	Prof.Dr. W. Klingenberg
Koreferent:	Prof.Dr. H. Karcher

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Folgende Eigenschaften des geodätischen Flußes $F_t: T_1M \longrightarrow T_1M$ und der Fundamentalgruppe D einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit negativer Krümmung sind wohlbekannt:

1) Alle nicht trivialen abelschen Untergruppen von D sind unendlich zyklisch (Preissmann, [16])

2) D hat exponentielles Wachstum (Milnor, [15])

3) Die geschlossenen Geodätischen liegen dicht in T_1M (Anosov, [1])

4) F_t ist metrisch mischend (Anosov, [1])

Außer 3) gilt keine dieser Eigenschaften für eine flache Mannigfaltigkeit. Es ist interessant, herauszufinden, unter welchen Umständen und auf welche Weise die Eigenschaften beim Übergang von negativer Krümmung zu nicht positiver Krümmung verloren gehen.

Für 1) und 2) ist dies bekannt. Sei dazu M eine kompakte Mannigfaltigkeit nicht positiver Krümmung (wir zitieren die entsprechenden Ergebnisse nicht in voller Allgemeinheit).

1a) Jede abelsche Untergruppe von D ist eine endlich erzeugte, freie abelsche Gruppe. Ist k die Anzahl der Erzeugenden, dann ist $k \leq \dim(M)$ und es gibt eine totalgeodätische, isometrische Immersion eines flachen, k-dimensionalen Torus in M (Gromoll-Wolf, [10] und Lawson-Yau, [13])

2a) Entweder ist M flach oder D hat exponentielles

Wachstum (Avez, [2])

Es ist nicht bekannt, wann 4) falsch wird. Es ist auch nicht bekannt, ob Eigenschaft 3) immer richtig ist. Man weiß bisher noch nicht einmal, ob es überhaupt stets zwei geschlossene Geodätische gibt.

Der bisher allgemeinste untersuchte Fall sind die sogenannten visibility-Mannigfaltigkeiten (vis-Mf) vom Fuchsschen Typ, d.h. vis-Mfen, die eine geschlossene Geodätische enthalten und nicht diffeomorph zu einem Vektorbündel über dem Einheitskreis sind (Kompaktheit wird nicht gefordert). Die Hauptresultate für vis-Mfen vom Fuchsschen Typ sind wie folgt:

5) Es gibt unendlich viele Äquivalenzklassen geschlossener Geodätischer (Eberlein-O'Neill, [8])

6) Der geodätische Fluß ist topologisch transitiv auf der Menge Ω der nicht wandernden Punkte (Eberlein, [4])

Bemerkung. $\mathrm{vol}(M) < \infty \Longrightarrow \Omega = T_1M$

7) Ist $\Omega = T_1M$, dann ist der geodätische Fluß topologisch mischend (Eberlein, [5])

8) Ist eine Geodätische g nicht Rand eines flachen Streifens und $\dot{g}(0) \in \Omega$, dann ist sie Limes einer Folge von geschlossenen Geodätischen (Eberlein, [4])

Dabei ist definitionsgemäß g Rand eines flachen Streifens (der Breite r, $r > 0$), falls es eine totalgeodätische, isometrische Immersion $i: [0,r) \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ mit $i(0,t) = g(t)$ gibt.

9) D enthält freie (nicht abelsche) Untergruppen (dies ist stärker als exponentielles Wachstum) (Eberlein, [7])

Die in den Beweisen von 5) - 9) angewandten Methoden sind geometrischer Natur und Verallgemeinerungen von Methoden, die in der Theorie der automorphen Funktionen bzw. der Flächen konstanter negativer Krümmung benützt wurden. Dabei wurde die definierende Eigenschaft einer vis-Mf ausgenützt: In der universellen Überlagerung H gibt es zu jedem $p \in H$ und $e > 0$ eine Konstante r, so daß $\sphericalangle_p(g) \leqslant e$ für alle Geodätischen g mit $d(p,g) \geqslant r$.

Wie wir in dieser Arbeit sehen werden reichen zum Beweis der Eigenschaften 5) - 9) schwächere Voraussetzungen, falls man die entsprechenden Beweise geeignet abändert. Wir werden nur bestimmte Eigenschaften <u>einer</u> geschlossenen Geodätischen auf M voraussetzen. Eine dieser Eigenschaften besagt, daß ein Lift g (in H) dieser geschlossenen Geodätischen von einem Punkt $p \in H$ aus beliebig klein "aussieht" (d.h. $\sphericalangle_p(g) \leqslant e$), falls p weit genug von g entfernt ist. Dies ist in gewisser Weise eine Umkehrung der visibility-Eigenschaft. Es zeigt sich nun, daß die geschlossene Geodätische genau dann die geforderten Voraussetzungen erfüllt, wenn sie nicht Rand eines flachen Streifens unendlicher Breite ist (einen flachen Streifen unendlicher Breite wollen wir in Zukunft eine flache Halbebene nennen).

Dieses Kriterium bietet mehrere Vorteile. Man kann erstens handliche Bedingungen dafür angeben, wann eine Geodätische nicht Rand eines flachen Streifens ist (und damit erst recht nicht Rand einer flachen Halbebene). Ist die Geodätische g zum Beispiel hyperbolisch, oder gibt es zu jedem parallelen Vektorfeld X längs g ein t, so daß $K(E) < 0$ in der von $X(t)$ und $\dot{g}(t)$ aufgespannten Tangentialebene E, dann ist g nicht Rand eines flachen Streifens. In einer vis-Mf ist keine Geodätische Rand einer flachen Halbebene, wie man an der obigen Definition erkennt (im kompakten Fall ist dies äquivalent mit der visibility-Eigenschaft, siehe [6]).

Zweitens gibt es ein recht allgemeines Kriterium dafür, wann eine geschlossene Geodätische existiert, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Wir beweisen:

10) Ist $\Omega = T_1M$ und gibt es auf M eine Geodätische, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist, dann gibt es auch eine geschlossene Geodätische mit dieser Eigenschaft.

Ist also beispielsweise $\mathrm{vol}(M) < \infty$ und gibt es einen Tangentialvektor v mit $K(E) < 0$ für alle Tangentialebenen E, die v enthalten, dann gilt 10) und mithin 5) - 9). 3) folgt zum Beispiel aus 8) und 10), falls $\mathrm{vol}(M) < \infty$ und $K(E) < 0$ für alle Tangentialebenen E. Dies war bisher nur für strikt negative Krümmung bekannt.

Zum dritten eignet sich das oben angegebene Kriterium zusammen mit 10) zum Studium kompakter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten nicht positiver Krümmung. In der vorliegenden Arbeit wird nachgewiesen, daß für diese 5) immer erfüllt ist und außerdem 9) genau dann gilt, wenn M nicht flach ist. 7) gilt genau dann, wenn die universelle Überlagerung keinen euklidischen Faktor abspaltet und dies ist unabhängig von der gewählten Metrik (nicht positiver Krümmung).

Es gibt viertens Beispiele von kompakten Mannigfaltigkeiten M (für alle Dimensionen $\geqslant 3$), die das visibility-Axiom nicht erfüllen, auf denen aber geschlossene Geodätische existieren, die nicht Rand flacher Halbebenen sind. E. Heintze hat diese Beispiele konstruiert (und zwar, um zu zeigen, daß es Mannigfaltigkeiten nicht positiver Krümmung gibt, die keine lokalsymmetrische Struktur nicht positiver Krümmung tragen). Wir werden die Konstruktion dieser Mannigfaltigkeiten beschreiben. Damit erhält man auch die Lösung eines Problems, daß von Eberlein gestellt wurde - ob nämlich die topologische Transitivität des geodätischen Flußes impliziert, daß M eine vis-Mf ist ([5]). Die Antwort ist also nein falls $\dim(M) \geqslant 3$. Wir werden aber zeigen, daß Flächen unter diesen Umständen tatsächlich das visibility-Axiom erfüllen.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

Im ersten Paragraphen stellen wir die benötigten Hilfsmittel zusammen. Es handelt sich um bekannte Tatsachen aus der Theorie der nicht positiven Krümmung. Außerdem legen wir die Notationen fest und geben einige Definitionen.

Im zweiten Paragraphen werden Eigenschaften und Existenz geschlossener Geodätischer bzw. axialer Isometrien diskutiert. (2.2) und (2.3) sind grundlegend für alle folgenden Resultate. Aus (2.7) folgt unser Kriterium 10).

Im dritten und vierten Paragraphen geben wir die Beweise von 5) -9) unter unseren Voraussetzungen. Wir haben es allerdings vorgezogen, allgemeinere Gruppen als die Fundamentalgruppe von M zuzulassen, nämlich diskrete Gruppen von Isometrien im dritten, bzw. beliebige Gruppen von Isometrien im vierten Paragraphen.

Im fünften Paragraphen diskutieren wir dreidimensionale Mannigfaltigkeiten.

Im sechsten Paragraphen beschreiben wir die Konstruktion der Heintzebeispiele und geben zum Abschluß einige Verallgemeinerungen für Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkte an.

Bedanken möchte ich mich bei Prof. Dr. W. Klingenberg für die freundliche Betreuung dieser Arbeit, bei Dr. G. Thorbergsson für Verbesserungsvorschläge, die der Übersichtlichkeit der Arbeit zugute kamen und vor allem bei Dr. habil. E. Heintze für die vielen Diskussionen und die Mitteilung seiner Beispiele.

§1 Präliminarien

Alle vorkommenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten M werden als unendlich oft differenzierbar, vollständig und zusammenhängend vorausgesetzt. Mit d bezeichnen wir die durch die Riemannsche Struktur induzierte Metrik auf M. Geodätische seien immer nach der Bogenlänge und auf $\mathbb{R}$ parametrisiert (Ausnahmen bestätigen die Regel).

$\pi: T_1M \longrightarrow M$ sei das Bündel der Einheitstangentialvektoren. Jedes $v \in T_1M$ bestimmt eine Geodätische g_v, die durch $\dot{g}_v(0) = v$ festgelegt ist. Der geodätische Fluß $F_t: T_1M \longrightarrow T_1M$ ist definiert durch $v \longmapsto \dot{g}_v(t)$.

Bezeichnet K die Schnittkrümmung von M, so heißt M nicht positiv gekrümmt, falls $K(E) \leqslant 0$ bzw. negativ gekrümmt, falls $K(E) < 0$ und strikt negativ gekrümmt, falls $K(E) \leqslant c < 0$ jeweils für alle Tangentialebenen E.

Referenzen für das nun folgende sind [8], [3], [9]. Für einfach zusammenhängende, nicht positiv gekrümmte Riemannsche Mannigfaltigkeiten verwenden wir das Symbol H. Nach dem Satz von Hadamard-Cartan ist H diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ $(n = \dim(H))$. Zwei Geodätische g, h auf H heißen asymptotisch, falls es eine Konstante c gibt mit $d(gt,ht) \leqslant c$ für alle $t \geqslant 0$. Das definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Geodätischen. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $H(\infty)$. Ist $x \in H(\infty)$ und $g \in x$, so schreiben wir auch $g(\infty) = x$. Ist $p \in H$, dann gibt es genau eine Geodätische g_{px} mit $g_{px}(0) = p$

und $g_{px}(d(p,x))$ falls $x \in H$, bzw. $g_{px}(\infty) = x$ falls $x \in H(\infty)$. Wir setzen $\overline{H} := H \cup H(\infty)$.

Ist $p \in H$ und sind $x,y \in \overline{H} - \{p\}$, dann setzen wir $\sphericalangle_p(x,y) := \sphericalangle_p(\dot{g}_{px}(0), \dot{g}_{py}(0))$. Analog können wir den Winkel zwischen einem Tangentialvektor $v \neq 0$ und $x \in \overline{H} - \{p\}$ definieren. Ist $A \subset \overline{H} - \{p\}$, dann setzen wir $\sphericalangle_p(A) := \sup\{\sphericalangle_p(x,y) \mid x,y \in A\}$.

Zu einem Tangentialvektor $v \neq 0$ mit Fußpunkt p und $e > 0$ definieren wir $C(v,e) := \{x \in \overline{H} - \{p\} \mid \sphericalangle_p(v,x) < e\}$. $C(v,e)$ heißt der durch v und e bestimmte Kegel. Zusammen mit den offenen Mengen von H erzeugen die $C(v,e)$ eine Topologie von $\overline{H}$, bez. derer $\overline{H}$ homöomorph ist zum Einheitsball im $\mathbb{R}^n$. Wir arbeiten ausschließlich mit dieser Topologie.

Wir zitieren einige Standardresultate:

<u>1.1 Lemma (Kosinussatz).</u> Sind $p,q,r \in H$ paarweise verschieden, dann gilt

$$d^2(p,q) \geqslant d^2(p,r) + d^2(q,r) - 2d(p,r)d(q,r)\cos(\sphericalangle_r(p,q))$$

<u>1.2 Lemma.</u> Sind $p,q,r \in H$ paarweise verschieden, dann ist $\sphericalangle_p(q,r) + \sphericalangle_q(r,p) + \sphericalangle_r(p,q) \leqslant \pi$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn p, q und r die Ecken eines totalgeodätisch und isometrisch eingebetteten flachen Dreiecks sind.

<u>1.3 Lemma.</u> Sind g und h asymptotische Geodätische, dann

ist $\measuredangle_{g(0)}(\dot{g}(0),h(0)) + \measuredangle_{h(0)}(\dot{h}(0),g(0)) \leqslant \pi$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn $g([0,\infty))$, $h([0,\infty))$ und $g_{g(0)h(0)}([0,d(g(0),h(0))])$ einen totalgeodätisch und isometrisch eingebetteten flachen Halbstreifen aufspannen.

(1.3) wird in unserer Diskussion eine große Rolle spielen. (1.3) folgt aus (1.2).

Für eine Geodätische g sei g^{-1} definiert durch $g^{-1}(t) := g(-t)$. Für $g^{-1}(\infty)$ schreiben wir auch $g(-\infty)$. Es ist weder wahr, daß es zu allen $x \neq y \in H(\infty)$ eine Geodätische gibt mit $g(-\infty) = x$ und $g(\infty) = y$, noch, daß die Geodätische eindeutig bestimmt ist, falls sie existiert. Die erstere Eigenschaft ist äquivalent mit dem visibility-Axiom. Wir wollen zwei Geodätische <u>biasymptotisch</u> nennen, falls ihre Endpunkte übereinstimmen.

<u>1.4 Lemma.</u> 1) Sind g und h biasymptotisch, dann spannen g und h einen totalgeodätisch und isometrisch immersierten flachen Streifen auf.

2) Die Menge der Punkte in H, die auf einer zu g biasymptotischen Geodätischen liegen, ist abgeschlossen, konvex und spaltet isometrisch als $N \times \mathbb{R}$, wobei N abgeschlossen und konvex in H ist.

Aus 2) folgt, daß g genau dann nicht Rand einer flachen Halbebene ist wenn N kompakt ist. Außerdem ist g genau dann nicht Rand einer flachen Halbebene, wenn dies auch für alle zu g biasymptotischen Geodätischen gilt. (1.4) ist ebenfalls Konsequenz aus (1.2).

Ist φ: $H \longrightarrow H$ eine Isometrie, dann heißt $d_\varphi(p) := d(p, \varphi p)$ die Verschiebungsfunktion von φ. d_φ ist stetig und konvex. φ heißt parabolisch, falls d_φ kein Minimum annimmt, im anderen Falle halbeinfach. Ist φ halbeinfach und das Minimum von d_φ Null, dann heißt φ elliptisch. φ heißt axial, falls d_φ ein positives Minimum hat. φ ist axial genau dann, wenn es eine Geodätische a und ein $c > 0$ gibt mit $\varphi(a(t)) = a(t + c)$ für alle t. a heißt eine Achse von φ. Es ist möglich, daß eine axiale Isometie mehrere Achsen hat. Alle Achsen einer axialen Isometrie sind biasymptotisch.

Eine Isometrie φ erhält die Länge von Tangentialvektoren, also ist $\varphi: T_1H \longrightarrow T_1H$ wohldefiniert. Es gilt $F_t \circ \varphi = \varphi \circ F_t$ (F_t ist der geodätische Fluß).

D sei eine Gruppe von Isometrien. D heißt diskret, falls zu jedem $p \in H$ eine Umgebung U existiert mit $\varphi(U) \cap U = \emptyset$ für fast alle $\varphi \in D$. Ist D diskret, dann operiert D genau dann frei, wenn D keine Torsionselemente enthält (die Krümmung ist nicht positiv). Die Torsionselemente in einer diskreten Gruppe D sind genau die elliptischen Isometrien, die in D enthalten sind.

Ist D diskret und frei operierend, dann ist $H/D = M$ in kanonischer Weise eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Umgekehrt ist die Fundamentalgruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit eine frei operierende, diskrete Gruppe von Isometrien. Das Symbol M werden wir nur dann für den Quotienten H/D benützen, wenn D diskret ist und frei operiert.

Eine Geodätische g auf M heißt geschlossen, falls ein $c > 0$ existiert mit $g(t) = g(t + c)$ für alle t. Die Periode von g ist das kleinste $c > 0$ mit dieser Eigenschaft. Die geschlossenen Geodätischen entsprechen genau den periodischen Orbiten des geodätischen Flußes auf T_1M. Ist a ein Lift der geschlossenen Geodätischen (in H), dann ist a Achse einer axialen Isometrie und umgekehrt. Wir wollen deshalb allgemein $v \in T_1H$ periodisch (bez. D) nennen, wenn v tangential an eine Achse einer Isometrie aus D ist (D beliebig).

$v \in T_1M$ heißt nicht wandernd, falls es Folgen $t_n \to \infty$ und $v_n \to v$ gibt mit $F_{t_n}(v_n) \to v$. Entsprechend nennen wir $v \in T_1H$ nicht wandernd (bez. D), falls es Folgen $\{\varphi_n\} \subset D$, $t_n \to \infty$ und $v_n \to v$ gibt mit $\varphi_n(F_{t_n}(v_n)) \to v$. Die Menge aller dieser Punkte bezeichnen wir mit $\Omega(D)$ bzw. Ω, falls keine Verwechslung zu befürchten ist. Ω ist abgeschlossen und invariant unter dem geodätischen Fluß. Weil der geodätische Fluß das auf T_1H kanonisch gegebene Volumenmaß erhält gilt $\Omega = T_1H$, falls es eine abzählbare Teilmenge $N \subset D$ und eine meßbare Teilmenge V von H von endlichem Maß gibt mit $\bigcup_{\varphi \in N} \varphi(V) = H$.

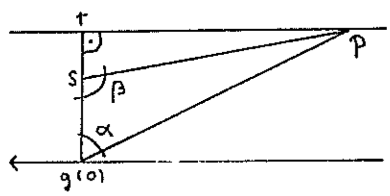
Ist $A \subset T_1M$ invariant unter dem geodätischen Fluß F_t dann heißt F_t topologisch transitiv auf A (topologisch mischend auf A), wenn zu allen nicht leeren, offenen Teilmengen $U, V \subset A$ ein t existiert mit $F_t(U) \cap V \neq \emptyset$ (bzw. ein T existiert mit $F_t(U) \cap V \neq \emptyset$ für alle t mit $|t| \geqslant T$). Entsprechend nennen wir F_t auf einer unter D und F_t invarianten Teilmenge $A \subseteq T_1H$ topologisch transitiv modulo D (topologisch mischend modulo D), wenn zu allen nicht leeren, offenen Teilmengen $U, V \subset T_1H$ ein $\varphi \in D$ und t existieren mit $\varphi(F_t(U)) \cap V \neq \emptyset$ (bzw. ein T existiert, so daß es für alle t mit $|t| \geqslant T$ ein $\varphi \in D$ gibt mit $\varphi(F_t(U)) \cap V \neq \emptyset$). F_t ist genau dann topologisch transitiv auf A modulo D, wenn zu allen $v, w \in A$ Folgen $\{v_n\} \subset A$ mit $v_n \longrightarrow v$, $\{\varphi_n\} \subset D$ und $t_n \longrightarrow \infty$ gibt mit $\varphi_n(F_{t_n}(v_n)) \longrightarrow w$.

§2 Axiale Isometrien

In diesem Paragraphen wollen wir Existenz und Eigenschaften axialer Isometrien diskutieren. Als Vorbereitung für diese Diskussion dienen uns einige Lemmata.

2.1 Lemma. Eine Geodätische berandet genau dann einen flachen Streifen der Breite $c \geqslant 0$, wenn es Folgen $\{p_k\} \subset C(-\dot{g}(0),1/k) \cap H$ und $\{q_k\} \subset C(\dot{g}(0),1/k) \cap H$ gibt mit $d(g(0),g_{p_k q_k}) \geqslant c$.

Beweis. Wir zeigen die Existenz eines flachen Streifens der Breite $c \geqslant 0$, falls Folgen $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ in der angegebenen Weise existieren. Die umgekehrte Richtung ist klar. Nur der Fall $c > 0$ ist nicht trivial.



Den zu $g(0)$ nächsten Punkt auf $g_{p_k q_k}$ nennen wir r_k und setzen $s_k = g_{g(0)r_k}(c)$. s_k liegt also nach Voraussetzung zwischen $g(0)$ und r_k. Weiterhin setzen wir $h_k = g_{s_k p_k}$, $h'_k = g_{s_k q_k}$, $\alpha_k = \sphericalangle_{g(0)}(p_k,r_k)$, $\alpha'_k = \sphericalangle_{g(0)}(q_k,r_k)$, $\beta_k = \sphericalangle_{s_k}(g(0),p_k)$ und $\beta'_k = \sphericalangle_{s_k}(g(0),q_k)$.

Nach Voraussetzung gilt $\alpha_k + \alpha'_k \geqslant \pi - 2/k$. Andererseits $\sphericalangle_{r_k}(g(0),p_k) = \sphericalangle_{r_k}(g(0),q_k) = \pi/2$, mithin $\pi/2 \geqslant \alpha_k \geqslant \pi/2 - 2/k$, $\pi/2 \geqslant \alpha'_k \geqslant \pi/2 - 2/k$. Analog folgt $\pi/2 \leqslant \beta_k$, $\pi/2 \leqslant \beta'_k$ und wegen $\alpha_k + \beta_k \leqslant \pi$, $\alpha'_k + \beta'_k \leqslant \pi$ folgt $\pi/2 \leqslant \beta_k \leqslant \pi/2 + 2/k$, dasselbe für β'_k.

Weil $d(g(0),s_k) = c =$ constant folgt insbesondere $d(g(0),p_k) \longrightarrow \infty$, $d(g(0),q_k) \longrightarrow \infty$ und deshalb auf Grund unserer Voraussetzung $p_k \longrightarrow g(-\infty)$, $q_k \longrightarrow g(\infty)$.

Durch Übergang zu einer Teilfolge nehmen wir an, daß die s_k konvergieren, $s_k \longrightarrow s$. Dann gilt $h_k \longrightarrow h_{sg(-\infty)}$ $h_k' \longrightarrow h_{sg(\infty)}$. Unsere Überlegungen zeigen

$\measuredangle_{g(0)}(s,g(-\infty)) = \alpha = \measuredangle_{g(0)}(s,g(\infty)) = \alpha' = \pi/2$,

$\measuredangle_s(g(0),g(-\infty)) = \beta = \measuredangle_s(g(0),g(\infty)) = \beta' = \pi/2$.

Aus (1.3) folgern wir, daß $g((-\infty,0])$, $g_{g(0)s}([0,c])$ und $g_{sg(-\infty)}([0,\infty))$ bzw. $g([0,\infty))$, $g_{g(0)s}([0,c])$ und $g_{sg(\infty)}([0,\infty))$ jeweils einen totalgeodätisch und isometrisch eingebetteten flachen Halbstreifen der Breite c beranden. Weil g in $g(0)$ keinen Knick hat stoßen diese Halbstreifen differenzierbar zusammen.

<u>2.2 Lemma.</u> Eine Geodätische g ist entweder Rand einer flachen Halbebene, oder es gibt Konstanten $e > 0$, $c > 0$, so daß für alle $x \in C(-\dot{g}(0),e)$ und alle $y \in C(\dot{g}(0),e)$ eine Verbindungsgeodätische existiert und für jede solche Verbindungsgeodätische h von x nach y gilt $d(g(0),h) \leqslant c$.

<u>Bemerkung.</u> Insbesondere sind diese Verbindungsgeodätischen nicht Rand flacher Halbebenen.

<u>Beweis.</u> Zunächst folgt aus (2.1), daß es Konstanten $e > 0$ und $c > 0$ gibt, so daß $d(g_{pq},g(0)) \leqslant c$ für alle $p \in C(-\dot{g}(0),e) \cap H$ und $q \in C(\dot{g}(0),e) \cap H$. Ist

$x \in C(-\dot{g}(0),e)$ und $y \in C(\dot{g}(0),e)$, dann wählen wir $\{p_n\} \subset C(-\dot{g}(0),e) \cap H$ und $\{q_n\} \subset C(\dot{g}(0),e) \cap H$ mit $p_n \longrightarrow x$ und $q_n \longrightarrow y$. Weil $d(g(0),g_{p_n q_n}) \leqslant c$ gibt es (nach geeigneter Umparametrisierung) konvergente Teilfolgen der $g_{p_n q_n}$ und der Limes einer solchen Teilfolge ist eine Verbindungsgeodätische von x und y.

Ist andererseits h eine beliebige Verbindungsgeodätische von x und y, dann gilt $h(-n) \longrightarrow x$, $h(n) \longrightarrow y$. Für große n ist dann $h(-n) \in C(-\dot{g}(0),e) \cap H$ und $h(n) \in C(\dot{g}(0),e) \cap H$. Also $d(g(0),h) \leqslant c$.

Wenn die Krümmung von H strikt negativ ist, dann ist leicht zu sehen, daß eine Geodätische in einem Punkt $p \in H$ einen beliebig kleinen Winkel aufspannt falls p weit genug von dieser Geodätischen entfernt ist. Ist die Geodätische g außerdem Achse einer axialen Isometrie φ, dann gibt es zu allen Umgebungen U von $g(-\infty)$ und V von $g(\infty)$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^n(\bar{H}-U) \subset V$ und $\varphi^{-n}(\bar{H} - V) \subset U$. Diese beiden Eigenschaften sind zum Beispiel in der Diskussion qualitativer Eigenschaften des geodätischen Flußes von großer Bedeutung. Beide gelten offensichtlich nicht, wenn g Rand einer flachen Halbebene ist.

<u>2.3 Satz.</u> Sei $\varphi : H \longrightarrow H$ eine axiale Isometrie und a eine Achse von φ. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) a ist nicht Rand einer flachen Halbebene

2) Zu allen Umgebungen U von $a(-\infty)$ und V von $a(\infty)$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^n(\bar{H} - U) \subset V$ und $\varphi^{-n}(\bar{H} - V) \subset U$ für alle $n \geqslant N$

3) Zu allen $x \in H(\infty) - \{a(\infty)\}$ gibt es Umgebungen U von $a(\infty)$ und V von x und eine Konstante c, so daß für alle $y \in U$ und $z \in V$ eine Verbindungsgeodätische existiert und $d(h,a(0)) \leqslant c$ für alle diese Verbindungsgeodätischen h

4) Zu $e > 0$ gibt es ein r mit $\sphericalangle_q(a) \leqslant e$ falls $d(q,a) \geqslant r$

Bemerkungen. i) a^{-1} ist Achse von φ^{-1}. 3) gilt also sinngemäß auch für $a(-\infty)$.

ii) Insbesondere folgt aus 3), daß $a(\infty)$ mit jedem $x \in H(\infty) - \{a(\infty)\}$ geodätisch verbunden werden kann.

Übersichtlichkeitshalber stellen wir dem Beweis des Satzes zwei Lemmata voran. Sei dabei a stets Achse einer axialen Isometrie φ und u so gewählt, daß $\varphi(a(t)) = a(t + u)$ für alle t.

2.4 Lemma. $B \subset H(\infty)$ sei eine kompakte Menge mit $\varphi(B) \subset B$. Es gebe eine Umgebung U von $a(\infty)$ mit $U \cap B = \emptyset$ und B enthalte zumindest einen von $a(-\infty)$ verschiedenen Punkt. Dann ist a Rand einer flachen Halbebene.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $e > 0$ mit

$C(\mathring{a}(0),e) \cap B = \emptyset$. Mithin

$\pi > \sup_{e>0} \{C(\mathring{a}(0),e) \cap B = \emptyset\} = e_o > 0$. Weil B kompakt ist gilt $A = \overline{C(\mathring{a}(0),e_o)} \cap B \neq \emptyset$. Nun ist $\varphi(B) \subset B$ und $\varphi(C(\mathring{a}(0),e_o)) \subset C(\mathring{a}(0),e_o)$, also $\varphi(A) \subset A$.

Für alle $x \in A$ ist nach Definition $\sphericalangle_{a(0)}(x,a(\infty)) = e_o$. Insbesondere $\sphericalangle_{a(nu)}(\varphi^n x,a(\infty)) = \sphericalangle_{a(0)}(x,a(\infty)) = e_o$ für alle $x \in A$ und $n \in \mathbb{N}$. Weil aber auch $\varphi^n(A) \subset A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sphericalangle_{a(0)}(\varphi^n x,a(\infty)) = e_o$. Nach (1.3) spannen daher $a([0,nu])$, $g_{a(0)\varphi^n x}([0,\infty))$ und $g_{a(nu)\varphi^n x}([0,\infty))$ einen totalgeodätisch und isometrisch eigebetteten flachen Halbstreifen S_n auf. Sei $S_n' = \varphi^{-n}(S_{2n})$. S_n' ist eindeutig bestimmt durch den Einheitstangentialvektor v_n in $a(0)$, der senkrecht zu $\mathring{a}(0)$ ist und in das Innere von S_n' zeigt. Wir definieren $i_n\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow H$ durch $i_n(s,t) = \exp(sv_n + t\mathring{a}(0))$.
Konvergiert eine Teilfolge der v_n , dann konvergieren die i_n gegen eine totalgeodätische, isometrische Einbettung $i\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow H$.

<u>2.5 Korollar.</u> 1) Sei $x \in H(\infty) - \{a(-\infty),a(\infty)\}$ ein Fixpunkt von φ. Dann ist a Rand einer flachen Halbebene.

2) φ hat entweder genau 2 Fixpunkte oder unendlich viele.

<u>Beweis.</u> 1) ist klar. Hat φ einen dritten Fixpunkt x, so können wir eine flache Halbebene mit Rand a in der

obigen Weise konstruieren. Wie man an der Konstruktion erkennt ist x ein Randpunkt der flachen Halbebene und diese ist daher invariant unter φ. Deshalb bleiben alle Randpunkte der Halbebene fest unter φ.

<u>2.6 Lemma.</u> Entweder ist a Rand einer flachen Halbebene, oder zu allen $0 < e, e' < \pi$ und jedem $t \in \mathbb{R}$ gibt es ein t' mit $C(\mathring{a}(t'), e) \subset C(\mathring{a}(t), e')$.

<u>Beweis.</u> Es gebe $0 < e, e' < \pi$ und $t \in \mathbb{R}$, so daß für alle t' gilt $C(\mathring{a}(t'), e) \not\subset C(\mathring{a}(t), e')$. Insbesondere gibt es also $z_n \in C(\mathring{a}(nu), e)$ mit $z_n \notin C(\mathring{a}(t), e')$.
Weil $\varphi(C(\mathring{a}(t), e') \subset C(\mathring{a}(t), e')$ gilt $\varphi^{-k}(z_n) \notin C(\mathring{a}(t), e')$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $x_n = \varphi^{-n}(z_n)$, also $x_n \in C(\mathring{a}(0), e)$ und $x_n, \varphi x_n, \ldots, \varphi^n x_n \notin C(\mathring{a}(t), e')$.
Sei x ein Häufungspunkt der x_n. Dann ist also $x \in C(\mathring{a}(0), e) - C(\mathring{a}(t), e')$ und nach Wahl der x_n gilt $\varphi^n x \notin C(\mathring{a}(t), e')$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $B = \{x \in H(\infty) \mid \varphi^n x \notin C(\mathring{a}(t), e') \text{ für alle } n\}$. Dann ist B kompakt, $\varphi(B) \subset B$ und nach dem gerade bewiesenen enthält B Punkte verschieden von $a(-\infty)$. Weil $B \cap C(\mathring{a}(t), e') = \emptyset$ ist (2.4) anwendbar.

<u>Beweis des Satzes.</u> 1) $\Longrightarrow$ 2): Aus (2.6) schließen wir, daß die $C(\mathring{a}(t), e)$ für festes $\pi > e > 0$ eine Umgebungsbasis von $a(\infty)$ sind, falls a nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Weil a^{-1} Achse von φ^{-1} ist, sind die $C(-\mathring{a}(t), e)$ dann ebenfalls Umgebungsbasis von $a(-\infty)$.

Zu U und V gibt es also ein $t > 0$ mit $C(-\mathring{a}(-t),\pi/2) \subset U$ und $C(\mathring{a}(t),\pi/2) \subset V$. Sei $N \in \mathbb{N}$ so, daß $Nu > 2t$. Dann gilt für $n \geqslant N$

$\varphi^n(\bar{H} - U) \subset \varphi^n(\bar{H} - C(-\mathring{a}(-t),\pi/2)) \subset C(\mathring{a}(t),\pi/2) \subset V$.

Genauso folgt $\varphi^{-n}(\bar{H} - V) \subset U$.

1) $\Longrightarrow$ 3): Nach (2.2) gibt es $e > 0$ und $c_o > 0$, so daß für alle $y \in C(-\mathring{a}(0),e)$ und $z \in C(\mathring{a}(0),e)$ eine Verbindungsgeodätische existiert und es gilt $d(g(0),h) \leqslant c_o$ für alle diese. Nach dem gerade bewiesenen gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^{-n}x \in C(-\mathring{a}(0),e)$. Wir setzen $U = \varphi^n(C(\mathring{a}(0),e))$, $V = \varphi^n(C(-\mathring{a}(0),e)$ und $c = nu + c_o$.

1) $\Longrightarrow$ 4): a ist invariant unter φ, mithin $\sphericalangle_q(a) = \sphericalangle_{\varphi q}(a)$. Wir können uns also auf Punkte aus $\overline{C(\mathring{a}(0),\pi/2)} - (C(\mathring{a}(u),\pi/2) \cup H(\infty))$ beschränken. Diese Menge wollen wir Z nennen. Wir wählen e und c gemäß (2.2). Nach (2.6) gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^{-n}Z \subset C(-\mathring{a}(0),e)$, also $d(g_{\varphi^{-n}qa(t)},a(0)) \leqslant c$ für $t \geqslant 0$, $q \in Z$. Mithin gilt für alle $q \in Z$ und alle $t \geqslant nu$

$d(g_{qa(t)},a(0)) \leqslant nu + d(g_{qa(t)},a(nu)) \leqslant nu + c = c_1$.

Für $0 \leqslant t \leqslant nu$ gilt aber sowieso $d(a(0),g_{qa(t)}) \leqslant c_1$. Dieselbe Diskussion machen wir für $t \leqslant 0$ und erhalten insgesamt eine Konstante c_2, so daß für $q \in Z$ und $t \in [-\infty,\infty]$ gilt $d(a(0),g_{qa(t)}) \leqslant c_2$. Aus dem Kosinussatz folgt dann unsere Behauptung.

Die anderen Richtungen sind trivial. Damit ist der Beweis fertig.

Wir kommen nun zur Diskussion über die Existenz axialer

axialer Isometrien. Wir fragen uns, ob eine gegebene Gruppe von Isometrien eine axiale Isometrie enthält. Dies ist äquivalent mit der Existenz geschlossener Geodätischer auf M, falls die Gruppe D diskret ist und frei operiert.

<u>2.7 Satz.</u> Sei $\Omega = \Omega(D) = T_1H$. Es gebe eine Geodätische g in H, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Dann gibt es zu beliebig vorgegebenen Umgebungen U von $g(-\infty)$ und V von $g(\infty)$ eine Achse a einer axialen Isometrie $\varphi \in D$ mit $a(-\infty) \in U$ und $a(\infty) \in V$, so daß a nicht Rand einer flachen Halbebene ist.

<u>Bemerkung.</u> Aus (2.2) und (2.7) folgt sofort, daß die geschlossenen Geodätischen dicht in T_1M liegen, falls M negativ gekrümmt ist und $\mathrm{vol}(M) < \infty$.

<u>Beweis.</u> Sei

$\Omega_o = \{v \in T_1H \mid$ es gibt $\{\varphi_n\} \subset D$, $t_n \to \infty$ mit $\varphi_n F_{t_n}(v) \to v\}$.

Ω_o ist dicht in T_1H, denn $\Omega = T_1H$ (siehe [21]).

Sei $v_k \to v = \dot{g}(0)$ eine Folge von Vektoren in Ω_o.

g_{v_k} ist für große k nicht Rand einer flachen Halbebene und $g_{v_k}(-\infty) \in \mathring{U}$, $g_{v_k}(\infty) \in \mathring{V}$. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß v in Ω_o ist. Es gibt daher Folgen $\{\varphi_n\} \subset D$ und $t_n \to \infty$ mit $\varphi_n(F_{t_n}(v)) \to v$. Wir zeigen nun, daß die φ_n für große n axial sein müssen und die Endpunkte ihrer Achsen in U bzw. V liegen.

Es gibt ein $e > 0$ so, daß $U_e = C(-v,e) \cap H(\infty) \subset U$

und $V_e = C(v,e) \cap H(\infty) \subset V$. Nach (2.2) können wir e so wählen, daß man jeden Punkt aus U_e mit jedem Punkt aus V_e geodätisch verbinden kann und alle diese Verbindungsgeodätischen in beschränktem Abstand von $p = g(0)$ sind.

+) Für große n gilt $\varphi_n^{-1}(\overline{V}_e) \subset V_e$

Denn ist dies nicht der Fall, dann gibt es unendlich viele n, so daß ein $x_n \in \partial V_e$ existiert mit $\varphi_n^{-1}(x_n) \notin V_e$. Weil $v_n = \varphi_n(F_{t_n}(v)) \longrightarrow v$ ist für e' beliebig vorgegeben $\measuredangle_{\pi(v_n)}(v_n,x) \leqslant e + e'$ für alle $x \in \partial V_e$ falls n groß genug ist. Nun ist $\varphi_n^{-1}(v_n) = \dot{g}(t_n)$, also $\measuredangle_{g(t_n)}(\dot{g}(t_n),\varphi_n^{-1}(x_n)) \leqslant e + e'$.

Nach Wahl der x_n gilt auch $\measuredangle_{g(0)}(\dot{g}(0),\varphi_n^{-1}(x_n)) \geqslant e$. Sei x ein Häufungspunkt der $\varphi_n^{-1}(x_n)$. Weil e' beliebig war gilt $\measuredangle_{g(t)}(x,g(\infty)) = e$ für alle $t \geqslant 0$. Wir haben also nach (1.3) einen flachen Halbstreifen, der aufgespannt wird von $g([0,\infty))$ und $g_{g(0)x}([0,\infty))$. Durch Anwenden der φ_n erhalten wir eine flache Halbebene mit Rand g, ein Widerspruch. Also gilt +).

++) Für große n gilt $\varphi_n(\overline{U}_e) \subset U_e$

Ist dies nämlich nicht richtig, dann gibt es für unendlich viele n ein $x_n \in \partial U_e$ mit $\varphi_n(x_n) \notin U_e$. Weil $v_n \longrightarrow v$ ist für e' beliebig $\measuredangle_{\pi(v_n)}(-v_n,x) \geqslant e - e'$ für genügend großes n und $x \in H(\infty) - U_e$. Insbesondere $\measuredangle_{\pi(v_n)}(-v_n,\varphi_n x_n) \geqslant e - e'$, also $\measuredangle_{g(t_n)}(-\dot{g}(t_n),x_n) \geqslant e - e'$. Weil e' beliebig war gilt $\measuredangle_{g(t)}(-\dot{g}(t),x) = e$ für alle $t \geqslant 0$ und einen Häufungspunkt x der x_n. $g([0,\infty))$ und $g_{g(0)x}([0,\infty))$ spannen also nach (1.3) einen flachen Halbstreifen auf. Wieder durch Anwenden der φ_n erhalten wir eine flache Halbebene an g und damit einen Widerspruch. Also ++).

Weil U_e und V_e homöomorph sind zu Vollkugeln, folgt aus +) und ++), daß die φ_n für genügend großes n Fixpunkte $y_n \in U_e$ und $z_n \in V_e$ haben. Nach unserer Wahl von e wissen wir, daß y_n und z_n durch eine Geodätische g_n verbunden werden können, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Aus (2.8) folgt, daß φ_n halbeinfach ist und eine zu g_n biasymptotische Geodätische invariant läßt. Für n genügend groß kann φ_n aber nicht elliptisch sein, denn $d(\varphi_n(g(0)),g(0)) \longrightarrow \infty$. Damit folgt (2.7)

<u>2.8 Lemma.</u> Die Geodätische g sei nicht Rand einer flachen Halbebene. φ sei eine Isometrie, die die Endpunktmenge von g festläßt. Dann ist entweder φ axial mit einer zu g oder g^{-1} biasymptotischen Achse, oder φ ist elliptisch und läßt eine zu g biasymptotische Geodätische fest.

<u>Beweis.</u> Die Menge der Punkte, die auf einer zu g biasymptotischen Geodätischen liegen, spaltet isometrisch als $N \times \mathbb{R}$, wobei N kompakt und konvex in H ist. Nach Voraussetzung ist $N \times \mathbb{R}$ invariant unter φ, also spaltet $\varphi | N \times \mathbb{R}$ als (φ_1, φ_2), wobei $\varphi_1 : N \longrightarrow N$. φ_1 hat einen Fixpunkt, denn N ist homöomorph zu einer Vollkugel.

§3 Diskrete Gruppen von Isometrien

Bevor wir mit den eigentlichen Untersuchungen beginnen, wollen wir einige Eigenschaften spezieller diskreter Gruppen von Isometrien diskutieren.

3.1 Satz. D sei diskret und enthalte eine axiale Isometrie φ mit einer Achse a, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Für alle $\psi \in D$ sei $\psi(a(\pm\infty)) \in \{a(\infty), a(-\infty)\}$. Dann gilt:

1) Es gibt eine zu a biasymptotische Geodätische b mit $\psi(b) = b$ (mengentheoretisch) für alle $\psi \in D$

2) D enthält eine unendlich zyklische Gruppe von endlichem Index und alle $\psi \in D$ sind halbeinfach

3) Operiert D frei, dann ist D unendlich zyklisch und alle $\psi \in D - \{id\}$ sind axial

Wir schließen noch eine Beobachtung an: D operiert in kanonischer Weise auf dem Normalenbündel von b, welches durch Wahl einer parallelen ON-Basis isometrisch zum $\mathbb{R}^n$ wird ($n = \dim(H)$). D besitzt also in natürlicher Weise eine treue Darstellung als diskrete Gruppe von Bewegungen eines euklidischen Raumes.

Beweis. Die Menge aller Punkte, die auf einer zu a biasymptotischen Geodätischen liegen, spaltet isometrisch als $N \times \mathbb{R}$, wobei N eine kompakte, konvexe Teilmenge von H ist. Nach Voraussetzung ist $N \times \mathbb{R}$ invariant unter D. Mithin respektieren alle $\psi \in D$ diese Spaltung, d.h. zu $t \in \mathbb{R}$ und $\psi \in D$ gibt es ein t' mit $\psi(N \times \{t\}) = N \times \{t'\}$.

Gibt es ein $\psi \in D$ mit $\psi(a(\infty)) = a(-\infty)$, dann wählen wir den Nullpunkt in $N \times \mathbb{R}$ so, daß $\psi(N \times \{0\}) = N \times \{0\}$ für mindestens ein solches ψ. Gibt es kein $\psi \in D$ mit dieser Eigenschaft, dann setzen wir den Nullpunkt willkürlich fest.

Weil D diskret ist und eine axiale Isometrie enthält gibt es ein kleistes $t_o > 0$, so daß ein $\varphi_o \in D$ existiert mit $\varphi_o(N \times \{s\}) = N \times \{s + t_o\}$ für alle s. Aus (2.8) folgt, daß φ_o axial ist. Deshalb erzeugt φ_o eine unendlich zyklische Untergruppe Z von D. Wie üblich sieht man, daß für $\psi \in D$ mit $\psi(N \times \{s\}) = N \times \{s + t\}$ für alle s folgt $t = kt_o$, $k \in \mathbb{Z}$. Sei F die Untergruppe von D, die $N \times \{0\}$ in sich überführt. N ist kompakt, also ist F endlich. Außerdem gilt $F \cap Z = \{id\}$. Man sieht leicht, daß sich alle $\psi \in D$ schreiben lassen als $\psi = \varphi_o^k f$, $k \in \mathbb{Z}$, $f \in F$. Also $D = FZ = ZF$.

φ_o habe die Achse $a_o = \{k_o\} \times \mathbb{R}$. Sei $A = \{f(k_o \times \mathbb{R}) \mid f \in F\}$. A ist eine endliche Menge von biasymptotischen Geodätischen. Nun ist $\varphi_o^k f_1(f_2(k_o \times \mathbb{R})) = \varphi_o^k f_1 f_2(k_o \times \mathbb{R}) = f_3 \varphi_o^l(k_o \times \mathbb{R}) = f_3(k_o \times \mathbb{R})$. Also ist A invariant unter D. Sei k der Schwerpunkt der $\{fk_o \mid f \in F\}$. Dann ist $b := k \times \mathbb{R}$ invariant unter D. Damit ist 1) bewiesen. Z ist von endlichem Index in D und nach (2.8) sind alle Elemente aus D halbeinfach, also folgt 2). Operiert D frei, dann ist $F = \{id\}$, also gilt 3).

<u>3.2 Definition.</u> M heißt <u>axial</u>, falls D die von einer axialen Isometrie erzeugte unendlich zyklische Gruppe ist.

Diese Definition haben wir aus [8] übernommen. In (3.1) ist also bewiesen worden, daß M axial ist, falls M eine geschlossene Geodätische enthält, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist und alle $\gamma \in D$ die Endpunktmenge eines Lifts dieser geschlossenen Geodätischen invariant lassen. Die Struktur einer axialen Mannigfaltigkeit ist denkbar einfach: Ist a eine Achse des Erzeugenden von D, dann projiziert a zu einer doppelpunktfreien geschlossenen Geodätischen auf M (doppelpunktfrei bedeutet, daß die Geodätische bis auf die Periode injektiv ist). M ist via Exponentialabbildung des Normalenbündels dieser geschlossenen Geodätischen ein $\mathbb{R}^{n-1}$-Bündel über dem Einheitskreis.

<u>Freie Untergruppen</u>

Als erstes untersuchen wir nun die Existenz freier Untergruppen von D (frei bedeutet hier frei, nicht abelsch). Freie Untergruppen sagen etwas über die Größe von D aus. Beispielsweise ist die Existenz freier Untergruppen eine stärkere Eigenschaft als exponentielles Wachstum.

<u>3.3 Satz.</u> D sei diskret und enthalte eine axiale Isometrie φ mit einer Achse a, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Dann erfüllt D entweder die Voraussetzungen von (3.1) oder D enthält eine freie Untergruppe.

<u>3.4 Korollar.</u> Es gebe auf M eine geschlossene Geodätische, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Dann ist M entweder axial, oder die Fundamentalgruppe von M enthält eine freie Untergruppe.

<u>Einige Bemerkungen.</u> i) Die Kommutatoruntergruppe einer freien Gruppe in zwei Erzeugenden ist eine freie Gruppe in unendlich vielen Erzeugenden. Im Beweis werden wir allerdings direkt eine unendliche Menge $F \subset D$ konstruieren, so daß die Inklusion $F \hookrightarrow D$ zu einem injektiven Homomorphismus der von F (abstrakt) erzeugten freien Gruppe ausdehnt.

ii) Es ist interessant, daß nur die Existenz einer geschlossenen Geodätischen gefordert werden muß. Die Größe der Fundamentalgruppe hängt also scheinbar nicht mit der Existenz vieler geschlossener Geodätischer zusammen. Wir werden im Beweis sogar sehen, daß wir als Elemente der in i) erwähnten Menge F axiale Isometrien aus D wählen können, die bis auf Potenz zueinander konjugiert sind. In (3.6) bzw. (3.7) werden wir aber sehen, daß es auch unendlich viele geschlossene Geodätische gibt (falls M nicht axial ist).

iii) Nach einem Theorem von Tits (siehe [18]) enthält eine Gruppe von Automormphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper der Charakteristik 0 entweder eine freie Untergruppe oder eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index. Wenn es also eine treue Darstellung $\rho: D \longrightarrow Gl_K(V)$ gibt ($char(K) = 0$), dann muß D ebenfalls diese Eigenschaften besitzen. Zusammen mit (3.1) wird dies in (3.3) nachgewiesen.

iv) Die (gruppentheoretische) Technik des Auffindens freier Untergruppen, die in unserem Beweis benützt wird, wurde auch von Eberlein benützt (siehe [7]) und entstammt wohl der Theorie der automorphen Funktionen (siehe [14]). (3.4) ist die Verallgemeinerung des Hauptresultats aus [7].

Zum Beweis des Satzes benötigen wir ein Lemma, daß wir ohne Beweis aus [8] übernehmen.

<u>3.5 Lemma.</u> D sei diskret und $\varphi, \psi \in D$ seien axial. a sei eine Achse von φ und b sei eine Achse von ψ. Ist $a(\infty) = b(\infty)$, dann auch $a(-\infty) = b(-\infty)$.

<u>Beweis des Satzes.</u> Wir nehmen an, daß D nicht die Voraussetzungen von (3.1) erfüllt. Nach (3.5) gibt es also ein $\psi \in D$ mit $\psi(a(\pm\infty)) \notin \{a(\infty), a(-\infty)\}$.

Sei $e_1 > 0$ so, daß $\psi(a(\pm\infty)) \in \overline{H} - \overline{C(\mathring{a}(0), e_1)}$. U_1, V_1 seien Umgebungen von $\psi(a(-\infty))$, $\psi(a(\infty))$, die in $\overline{H} - \overline{C(\mathring{a}(0), e_1)}$ enthalten sind. $\psi(a)$ ist Achse von

$\psi\varphi\psi^{-1}$ und nicht Rand einer flachen Halbebene. Nach (2.3) gibt es ein N_1, so daß für alle $n \geqslant N_1$ gilt
$(\psi\varphi\psi^{-1})^n(\bar{H} - U_1) \subset V_1$, $(\psi\varphi\psi^{-1})^{-n}(\bar{H} - V_1) \subset U_1$.
Wir setzen $\varphi_1 = (\varphi\psi\varphi^{-1})^N$ und $W_1 = U_1 \cup V_1$. Es gilt also $\varphi_1^k(\bar{H} - W_1) \subset W_1$ für alle $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Wieder nach (2.3) gibt es ein m_1 mit
$\varphi^{m_1}(\psi(a(\pm\infty))) \in C(\mathring{a}(0), e_1)$. $e_2 > 0$ sei so gewählt, daß
$\varphi^{m_1}(\psi(a(\pm\infty))) \in \bar{H} - \overline{C(\mathring{a}(0), e_2)}$. U_2 , V_2 seien Umgebungen von $\varphi^{m_1}(\psi(a(-\infty)))$, $\varphi^{m_1}(\psi(a(\infty)))$, die zu W_1 disjunkt sind und in $\bar{H} - \overline{C(\mathring{a}(0), e_2)}$ enthalten sind. Es gibt ein N_2 , so daß für $\psi_2 := \varphi^{m_1}\psi\varphi\psi^{-1}\varphi^{-m_1}$ und für $n \geqslant N_2$ gilt $\psi_2^n(\bar{H} - U_2) \subset V_2$, $\psi_2^{-n}(\bar{H} - V_2) \subset U_2$.
Wir setzen $\varphi_2 = \psi_2^N$ und $W_2 = U_2 \cup V_2$.

Induktiv erhalten wir auf diese Weise $\varphi_n \in D$ und paarweise disjunkte $W_n \subset \bar{H}$, so daß $a(0) \notin W_n$ für alle n und $\varphi_n^k(\bar{H} - W_n) \subset W_n$ für alle $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Wir setzen $F = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$.

Wir behaupten nun, daß die Inklusion $F \hookrightarrow D$ zu einem injektiven Homomorphismus der von F (abstrakt) erzeugten freien Gruppe ausdehnt. Sei dazu $\varphi_{j_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{j_l}^{k_l}$ ein Wort in den φ_n mit $j_i \neq j_{i+1}$ und $k_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Wir müssen zeigen, daß dieses Wort nicht die identische Abbildung auf H repräsentiert. Nun ist $a(0) \in \bar{H} - W_{j_l}$, also $\varphi_{j_l}^{k_l}(a(0)) \in W_{j_l}$. Weil $W_{j_l} \subset \bar{H} - W_{j_{l-1}}$ folgt $\varphi_{j_{l-1}}^{k_{l-1}}\varphi_{j_l}^{k_l}(a(0)) \in W_{j_{l-1}}$. Induktiv sehen wir, daß a(0) schließlich in W_{j_1} landet. Weil $a(0) \notin W_{j_1}$ folgt die Behauptung.

Äquivalenzklassen geschlossener Geodätischer

Zwei geschlossene Geodätische g_1, g_2 auf M mit Perioden c_1, c_2 heißen äquivalent, falls es natürliche Zahlen n_1, n_2 gibt, so daß $c_1|[0,n_1c_1]$ als geschlossene Kurve frei homotop zu $c_2|[0,n_2c_2]$ oder $c_2^{-1}|[0,n_2c_2]$ ist. Die Menge der Äquivalenzklassen entspricht eindeutig der Menge der Äquivalenzklassen axialer Isometrien in D, wobei zwei axiale Isometrien φ_1, φ_2 äquivalent heißen, falls es ganze Zahlen k, l und $\psi \in D$ gibt mit $\varphi_1^k = \psi\varphi_2^l\psi^{-1}$ (ist im übrigen φ_1 axial und gilt letztere Gleichung, dann ist auch φ_2 axial). So definieren wir dann auch eine Äquivalenzrelation für axiale Isometrien wenn D diskret ist.

Ist M nicht kompakt und ändert man die Metrik auf M, so kann es passieren, daß aus axialen Isometrien parabolische Isometrien werden und umgekehrt. Ein triviales Beispiel ist ein einschaliges Hyperboloid, daß wir in ein Trompetenrohr abändern. Im ersten Fall sind alle Isometrien aus $D - \{id\}$ axial, im zweiten parabolisch. Die obigen Äquivalenzklassen sind also abhängig von der Metrik.

Ist M jedoch kompakt, dann sind alle Elemente aus $D - \{id\}$ axial, siehe [3]. Ein bisher ungelöstes Problem ist, ob dann immer unendlich viele Äquivalenzklassen geschlossener Geodätischer existieren. Ist $\dim(M) = 2$, dann folgt dies aus der Klassifikation der Flächen, für $\dim(M) = 3$ werden wir dies weiter unten sehen.

3.6 Satz. D sei diskret und enthalte eine axiale Isometrie φ mit einer Achse a, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Dann erfüllt D entweder die Voraussetzungen von (3.1), oder D enthält unendlich viele Äquivalenzklassen axialer Isometrien, deren Achsen nicht Rand flacher Halbebenen sind.

3.7 Korollar. Es gebe auf M eine geschlossene Geodätische, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Dann ist entweder M axial, oder es gibt unendlich viele Äquivalenzklassen geschlossener Geodätischer, die nicht Rand flacher Halbebenen sind.

Bemerkung. Ist M kompakt und erfüllt die Voraussetzung von (3.7), dann gibt es auf M bez. jeder Metrik unendlich viele geschlossene Geodätische.

Beweis des Satzes. Wir nehmen an, daß M nicht die Voraussetzung von (3.1) erfüllt. Nach (3.5) gibt es also ein $\psi \in D$ mit $\psi(a(-\infty)) = x \notin \{a(-\infty), a(\infty)\}$.

+) Zu allen Umgebungen U von x und V von $a(\infty)$ gibt es $\tau \in D$ mit $\tau(\bar{H} - U) \subset V$, $\tau^{-1}(\bar{H} - V) \subset U$

$\psi^{-1}(U)$ ist nämlich Umgebung von $a(-\infty)$ und nach (2.3) gibt es ein n mit $\varphi^{n}(\bar{H} - \psi^{-1}(U)) \subset V$, $\varphi^{-n}(\bar{H} - V) \subset \psi^{-1}(U)$. Mit $\tau = \varphi^{n}\psi^{-1}$ folgt +)

Nach (2.3) gibt es Umgebungen U_o von x und V_o von $a(\infty)$ und eine kompakte Menge $N \subset H$, so daß für $p \in U_o$ und $q \in V_o$ eine Verbindungsgeodätische existiert und alle diese Verbindungsgeodätischen durch N laufen. Wir wählen U_o und V_o so, daß $\overline{U}_o \cap \overline{V}_o = \emptyset$.

++) Sei $U \subset U_o$ eine Kegelumgebung von x und $V \subset V_o$ eine Kegelumgebung von $a(\infty)$. Sei $\tau \in D$ mit $\tau(\overline{H} - U) \subset V$, $\tau^{-1}(\overline{H} - V) \subset U$. Dann ist τ axial und translatiert eine Geodätische b mit $b(-\infty) \in U$ und $b(\infty) \in V$. Insbesondere ist b nicht Rand einer flachen Halbebene.

Es ist nämlich $\tau(\overline{V}) \subset V$ und $\tau^{-1}(\overline{U}) \subset U$. Weil $\overline{V}$ und $\overline{U}$ homöomorph zu Vollkugeln sind hat τ Fixpunkte $y \in U$ und $z \in V$. Nach Wahl von U und V gibt es eine Verbindungsgeodätische von y und z und alle diese sind nicht Rand einer flachen Halbebene. Nach (2.8) gibt es also eine unter τ invariante Verbindungsgeodätische b von y und z. Weil $U \cap V = \emptyset$ ist τ axial mit Achse b. Damit ist ++) bewiesen.

Nach (3.5) gilt $b(\infty) \neq a(\infty)$. Ist also U_n eine Umgebungsbasis von x, V_n eine Umgebunsbasis von $a(\infty)$, so erhalten wir mit ++) eine Folge von Achsen b_n (die nicht Rand flacher Halbebenen sind), so daß $b_n(-\infty) \longrightarrow x$ und $b_n(\infty) \longrightarrow a(\infty)$. Gibt es nur endlich viele Äquivalenzklassen axialer Isometrien in D, deren Achsen nicht Rand einer flachen Halbebene sind, dann können wir durch Übergang zu einer Teilfolge annehmen, daß alle b_n Achsen einer Äquivalenzklasse axialer Isometrien sind. Ersetzen wir eventuell noch b_n durch eine biasymptotische Geodätische, so können wir annehmen, daß es $\varphi_n \in D$ gibt mit $\varphi_n(b_1) = b_n$.

Sei $q \in H$ fest gewählt und $\sphericalangle_q(x,a(\infty)) = e > 0$. Wegen der Stetigkeit der Winkelmessung ist dann $\sphericalangle_q(b_n(\infty),b_n(-\infty)) \geqslant 3e/4$ für große n. Nun ist b_1 nicht Rand einer flachen Halbebene. Zu $e/2$ gibt es also nach (2.3) ein r, so daß $\sphericalangle_p(b_1) \leqslant e/2$ für alle $p \in H$ mit $d(p,b_1) \geqslant r$. Weil φ_n Isometrie ist gilt also auch $\sphericalangle_p(b_n) \leqslant e/2$ falls $d(p,b_n) \geqslant r$. Für große n ist deshalb $d(q,b_n) \leqslant r$. Weil D diskret ist treffen aber nur endlich viele Achsen (bis auf asymptotische Achsen) die kompakte Menge $\{p \mid d(q,p) \leqslant r\}$. Also folgt $b_n(-\infty) = x$ und $b_n(\infty) = a(\infty)$ für unendlich viele n im Widerspruch zu (3.5).

§ 4 Die Limesmenge einer Gruppe

D sei eine (beliebige) Gruppe von Isometrien von H.

4.1 Definition. $x \in H(\infty)$ heißt Limespunkt von D, wenn es eine Folge $\{\varphi_n\} \subset D$ gibt mit $\varphi_n(p) \longrightarrow x$ für ein $p \in H$ (und damit für alle $p \in H$). Die Menge aller Limespunkte von D bezeichnen wir mit $L(D)$.

4.2 Lemma. D enthalte eine axiale Isometrie φ mit Achse a , die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Dann ist entweder $|L(D)| = 2$, oder $|L(D)| = \infty$ und zu jeder Umgebung U jedes Punktes $x \in L(D)$ gibt es ein $\psi \in D$ mit $\psi(a(\infty))$ oder $\psi(a(-\infty)) \in U - \{x\}$. Enthält $L(D)$ eine offene Teilmenge von $H(\infty)$, dann ist $L(D) = H(\infty)$. Ist D diskret und $|L(D)| = \infty$, dann gibt es zu jeder Umgebung U eines Punktes $x \in L(D)$ ein $\psi \in D$ mit $\psi(a(\infty)) \in U - \{x\}$.

Bemerkung. $|L(D)| = 2$ trifft genau dann zu, wenn D die Endpunktmenge von a invariant läßt.

Beweis. $\varphi^n(a(0)) \longrightarrow a(\infty)$ und $\varphi^{-n}(a(0)) \longrightarrow a(-\infty)$, also $|L(D)| \geqslant 2$. Ist $|L(D)| \geqslant 3$, dann gibt es ein $x \in L(D)$ verschieden von den Endpunkten von a . $L(D)$ ist invariant unter D , wäre daher $|L(D)| < \infty$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^n(x) = x$. Nach (2.5) ist a dann aber Rand einer flachen Halbebene, ein Widerspruch. Das beweist die erste

Behauptung.

Sei nun $|L(D)| = \infty$, $x \in L(D)$ und U eine Umgebung von x. $C(v,e) \subset U$ sei ein Kegel mit $g_v(\infty) = x$, $\{\varphi_n\} \subset D$ eine Folge mit $\varphi_n(p) \longrightarrow x$ für alle $p \in H$. Zu $e/2$ finden wir nach (2.3) ein r, so daß $\sphericalangle_q(a) \leqslant e/2$, falls $d(q,a) \geqslant r$. Daher gilt auch $\sphericalangle_q(\varphi_n a) \leqslant e/2$ falls $d(q,\varphi_n a) \geqslant r$. Sei nun q der Fußpunkt von v. Nach Wahl der φ_n gilt $d(q,\varphi_n a(0)) \geqslant 2r$ und $\sphericalangle_q(x,\varphi_n(a(0)) \leqslant e/4$, falls n groß genug ist.

Entweder ist nun $d(q,\varphi_n a) \geqslant r$ für ein solches n. Dann ist $\sphericalangle_q(x,\varphi_n a(\pm\infty)) \leqslant$
$\sphericalangle_q(x,\varphi_n a(0)) + \sphericalangle_q(\varphi_n a(0),\varphi_n a(\pm\infty)) \leqslant e/4 + e/2 < e$ und deshalb $\varphi_n a(\pm\infty) \in U$.

Oder $d(q,\varphi_n a) \leqslant r$ für alle großen n. Dann folgt aber aus dem Kosinussatz, daß entweder $\varphi_n a(\infty)$ oder $\varphi_n a(-\infty)$ in U enthalten ist, falls $d(q,\varphi_n a(0))$ groß genug ist, also falls n groß genug ist.

Wir nehmen einmal an, daß $\varphi_n a(\infty) = x$ für alle großen n. Weil $|L(D)| = \infty$ gibt es ein $\psi = \psi(n) \in D$ mit $\psi\varphi_n a(\infty)$ oder $\psi\varphi_n a(-\infty) \notin \{\varphi_n a(\infty),\varphi_n a(-\infty)\}$. Sei z.B. $\psi\varphi_n a(-\infty) \notin \{\varphi_n a(\infty),\varphi_n a(-\infty)\}$. Dann gilt nach (2.3) $x \neq (\varphi_n\varphi\varphi_n^{-1})^l(\psi\varphi_n a(-\infty)) \longrightarrow x$ für $l \longrightarrow \infty$. Analog diskutiert man die anderen möglichen Fälle. Ist D diskret, dann wissen wir nach (3.5) auch $\psi\varphi_n a(\infty) \notin \{\varphi_n a(\infty),\varphi_n a(-\infty)\}$, mithin $x \neq (\varphi_n\varphi\varphi_n^{-1})^l(\psi\varphi_n a(\infty)) \longrightarrow x$ für $l \longrightarrow \infty$.

Um den Beweis von (4.2) zu beenden, müssen wir noch zeigen, daß $L(D) = H(\infty)$, falls $L(D)$ eine offene Teilmenge O von $H(\infty)$ enthält. Nach dem gerade bewiesenen gibt es ein $\psi \in D$ mit $\psi a(\infty) \in O$ oder $\psi a(-\infty) \in O$. Wir nehmen $\psi a(\infty) \in O$ an (der andere Fall geht analog). a ist Achse von $\psi\varphi\psi^{-1}$ und nicht Rand einer flachen Halbebene. Nach (2.3) gilt daher $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\psi\varphi\psi^{-1})^{-n}(O)} = H(\infty)$. Weil $L(D)$ abgeschlossen und invariant unter D ist folgt $L(D) = H(\infty)$.

<u>4.3 Definition.</u> $x,y \in H(\infty)$ heißen <u>dual</u> (bez. D), wenn zu allen Umgebungen U von x und V von y ein $\varphi \in D$ existiert mit $\varphi(\overline{H} - U) \subset V$ und $\varphi^{-1}(\overline{H} - V) \subset U$.

Insbesondere sind duale Punkte in $L(D)$ enthalten. Wir sind nun in der Lage, Proposition (2.6) aus [4] auch unter unseren Voraussetzungen beweisen zu können:

<u>4.4 Lemma.</u> D sei diskret und enthalte eine axiale Isometrie φ, deren Achsen nicht Rand flacher Halbebenen sind. Ist $|L(D)| = \infty$, dann sind je zwei (nicht notwendig verschiedene) Punkte aus $L(D)$ zueinander dual (bez. D).

<u>Beweis.</u> Sei $x \in L(D)$. Nach (4.2) gibt es eine Folge $\{\varphi_n\} \subset D$ mit $\varphi_n a(\infty) \longrightarrow x$. Durch Übergang zu einer Teilfolge nehmen wir an $\varphi_n a(-\infty) \longrightarrow y \in H(\infty)$. x und y sind zueinander dual: Ist U Umgebung von x , V von y und ist $\varphi_n a(\infty) \in U$, $\varphi_n a(-\infty) \in V$, dann gibt es nach (2.3) ein m mit $(\varphi_n \varphi \varphi_n^{-1})^m(\overline{H} - V) \subset U$, $(\varphi_n \varphi \varphi_n^{-1})^{-m}(\overline{H} - U) \subset V$.
Die Menge der zu x dualen Punkte ist D-invariant (siehe z.B. +) im Beweis von (3.6)) und abgeschlossen.

Sei nun $z \in L(D)$ beliebig und V eine Umgebung von z. Nach (4.2) gibt es ein $\psi \in D$ mit $\psi a(\infty) \in V$. Wir können ψ so wählen, daß $\psi a(-\infty) \neq y$. Dann ist nach (2.3) $(\psi \varphi \psi^{-1})^n(y) \in V$ für genügend großes n. Also $z \in \overline{Dy}$ und daher ist z dual zu x.

Wir entnehmen [4] ohne Beweis das folgende Lemma.

<u>4.5 Lemma.</u> Seien $v, w \in T_1H$ und $\{\varphi_n\} \subset D$ (D eine beliebige Gruppe von Isometrien von H). Dann gibt es genau dann Folgen $t_n \longrightarrow \infty$ und $\{v_n\} \in T_1H$ mit $v_n \longrightarrow v$ und $\varphi_n F_{t_n}(v_n) \longrightarrow w$, wenn $\varphi_n^{-1}(p) \longrightarrow g_v(\infty)$ und $\varphi_n(p) \longrightarrow g_w(-\infty)$ für alle $p \in H$.

<u>4.6 Satz.</u> D sei diskret und enthalte eine axiale Isometrie φ, deren Achsen nicht Rand flacher Halbebenen sind. D erfülle nicht die Voraussetzungen von (3.1). Dann gilt:

1) $v \in \Omega$ genau dann, wenn $g_v(\infty)$ und $g_v(-\infty)$ in $L(D)$

2) $\mathring{\Omega} \neq \emptyset \iff \Omega = T_1H \iff L(D) = H(\infty)$

3) Der geodätische Fluß ist topologisch transitiv auf Ω modulo D

4) Ist $v \in \Omega$ und g_v nicht Rand eines flachen Streifens, dann ist v Limes einer Folge von periodischen Vektoren

<u>Bemerkung.</u> Vergleiche (2.7).

<u>Beweis.</u> Nach (4.2) wissen wir, daß $|L(D)| = \infty$. 1) und 3) folgen daher sofort aus (4.4) und (4.5). Zum Beweis

von 2) bemerken wir, daß $L(D)$ nach 1) eine offene Teilmenge von $H(\infty)$ enthält, falls $\mathring{\Omega} \neq \emptyset$. 2) folgt also aus (4.2), (4.4) und (4.5).

Wir beweise 4): Nach 1) sind $g_v(\infty)$ und $g_v(-\infty)$ in $L(D)$ und daher dual. Sei $U_n \supset U_{n+1} \supset \dots$ eine Umgebungsbasis von Kegeln von $g_v(-\infty)$, $V_n \supset V_{n+1} \supset \dots$ eine von $g_v(\infty)$. $\varphi_n \in D$ sei so, daß $\varphi_n(\bar{H} - U_n) \subset V_n$, $\varphi_n^{-1}(\bar{H} - V_n) \subset U_n$. Daher $\varphi_n(\bar{V}_n) \subset V_n$, $\varphi_n^{-1}(\bar{U}_n) \subset U_n$. φ_n hat also Fixpunkte $y_n \in V_n$ und $z_n \in U_n$ (beide sind homöomorph zu Vollkugeln). Für große n kann man y_n und z_n nach (2.2) geodätisch verbinden, so daß alle Verbindungsgeodätischen nicht Rand einer flachen Halbebene sind. Aus (2.8) schließen wir, daß die φ_n für große n axial mit einer Achse g_n sind, so daß $g_n(-\infty) = y_n$ und $g_n(\infty) = z_n$. Aus (2.2) folgt $g_n \longrightarrow g_v$ (bez. einer geeigneten Parametrisierung). Das ist gerade die Behauptung.

<u>4.7 Satz.</u> D sei eine (beliebige) Gruppe von Isometrien von H und es sei $\Omega = \Omega(D) = T_1H$. H enthalte eine Geodätische, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist.

Dann gilt:

1) F_t ist geodätisch mischend auf T_1H modulo D

2) Ist $v \in T_1H$ und g_v nicht Rand eines flachen Streifens, dann ist v Limes einer Folge periodischer Vektoren

3) D enthält freie Untergruppen

Für den Beweis benützen wir Hilfsmittel, die sich in [5] finden: Die Funktion $f\colon H \times H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(p,x,q) =$

$d(q,x) - d(p,x)$ hat eine stetige Erweiterung auf $H \times \overline{H} \times H$, wobei für $x \in H(\infty)$ gilt

$$f(p,x,q) = \lim_{t \to \infty} (d(q, g_{px}t) - t) .$$

Für festes p und x heißt $f_{px}(q) = f(p,x,q)$ eine <u>Busemannfunktion</u> in x. $L(p,x) = f_{px}^{-1}(0)$ heißt <u>Horosphäre</u> in x durch p und $N(p,x) = f_{px}^{-1}((-\infty,0])$ der durch p bestimmte <u>Horoball</u> in x. f_{px} ist stetig und konvex. Es gilt $|f_{px}(q_1) - f_{px}(q_2)| \leqslant d(q_1,q_2)$, $f_{px} - f_{qx} =$ constant und $|f_{px}(g_{qx}t) - f_{px}(g_{qx}s)| = |t - s|$. Wir definieren für $v \in T_1H$ $W^{ss}(v) = \{\dot{g}_{qx}(0) \mid x = g_v(\infty) , q \in L(p,x)\}$. Ist φ eine Isometrie, dann ist $\varphi(W^{ss}(v)) = W^{ss}(\varphi v)$. Wir setzen daher $W_D^{ss}(v) = \bigcup_{\varphi \in D} W^{ss}(\varphi v)$.

Eberlein bewies nun, daß der geodätische Fluß topologisch mischend ist auf T_1H modulo D, wenn $\Omega(D) = T_1H$, D eine axiale Isometrie enthält und ein $v \in T_1H$ existiert mit $\overline{W_D^{ss}(v)} = T_1H$, siehe [5] (im Fall der Flächen konstanter negativer Krümmung geht dies auf Hedlund zurück, siehe [11]).

<u>Beweis des Satzes.</u> 2) folgt direkt aus (2.2) und (2.7). Wir beweisen 1): Wir versuchen, den Beweis des Theorems (5.2) aus [5], welches die Existenz eines $v \in T_1H$ mit $\overline{W_D^{ss}(v)} = T_1H$ zum Inhalt hat, nachzuvollziehen und werden dabei an einigen Stellen zusätzliche Überlegungen durchführen müssen.

+) Zu je zwei nicht leeren, offenen Mengen $U,V \subset T_1H$ gibt es ein $v \in U$ mit $W_D^{ss}(v) \cap V \neq \emptyset$.

Sei nämlich $U_1 = \{x \in H(\infty) \mid x = g_v(\infty) , v \in U\} \subset H(\infty)$, analog V_1. U_1, V_1 sind offen und nicht leer. Nach (2.7) enthält D eine axiale Isometrie φ mit einer Achse a, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist. Nach (4.2) gibt es ein $\psi \in D$ mit o.B.d.A. $\psi(a(\infty)) \in U_1$. Nach (2.3) läßt sich $\psi a(\infty)$ mit jedem von $\psi a(\infty)$ verschiedenen Punkt aus $H(\infty)$ geodätisch verbinden, insbesondere also mit einem Punkt aus V_1. Alle diese Verbindungsgeodätischen sind nicht Rand flacher Halbebenen, wir können also aus (2.7) schließen, daß D eine axiale Isometrie φ_1 enthält, so daß eine Achse a_1 von φ_1 nicht Rand einer flachen Halbebene ist und $x = a_1(\infty) \in U_1$, $y = a_1(-\infty) \in V_1$. Also gilt $\varphi_1^n(p) \longrightarrow x$, $\varphi_1^{-n}(p) \longrightarrow y$ für alle $p \in H$.

Weil zu je zwei Punkten $p, q \in H$ die Menge der zu ihnen äquidistanten Punkte nicht kompakt ist gibt es immer ein $z \in H(\infty)$ mit $L(p,z) = L(q,z)$. Sei nun p der Fußpunkt eines $v \in U$ mit $g_v(\infty) = x$ und q der Fußpunkt eines $w \in V$ mit $g_w(\infty) = y$. $x_n \in H(\infty)$ sei so gewählt, daß $L(p,x_n) = L(\varphi_1^n(q),x_n)$.

i) $x_n \longrightarrow x$

Sei nämlich z ein Häufungspunkt der x_n. Wir nehmen an $z \neq x$. Nach (2.3) gibt es eine Geodätische g mit $g(\infty) = x$ und $g(-\infty) = z$. Insbesondere gilt $f_{g(0)z}(g(t)) \longrightarrow \infty$ falls $t \longrightarrow \infty$. Nun ist g_{px} asymptotisch zu g, also $|f_{g(0)z}(g_{px}t) - f_{g(0)z}(gt)| \leq d(g_{px}t, gt) \leq d(g_{px}(0), g(0))$ für $t \geq 0$. Insbesondere $f_{g(0)z}(g_{px}t) \longrightarrow \infty$ für $t \longrightarrow \infty$.

Sei nun andererseits $t \geq 0$ fest gewählt und $g_n = g_{p\,\varphi_1^n q}$.

Für große n gilt dann $t \leqslant d(p,\varphi_1^n(q))$ und aus der Konvexität der Busemannfunktion folgt

$f(p,x_n,g_n t) \leqslant \max\{f(p,x_n,p),f(p,x_n,\varphi_1^n(q))\} = 0$. Nun gilt $g_n(t) \longrightarrow g_{px}(t)$, also $f(p,z,g_{px}t) \leqslant 0$. Das ist ein Widerspruch zu $f_{pz} - f_{g(0)z} = \text{constant}$, also gilt i).

ii) $\quad \sphericalangle_q(\varphi_1^{-n}(x_n),y) \longrightarrow 0$

Sei dazu jetzt $g_n = g_{px_n}$ und $t_n = d(p,\varphi_1^n(q))$. Für $0 \leqslant |t| \leqslant t_n/2$ gilt also $d(\varphi_1^n(q),g_n t) \geqslant t_n/2$. Nun gilt $0 = f(p,x_n,\varphi_1^n(q)) = f(p,x_n,p)$ und $d(\varphi_1^n(q),g_n t) \geqslant$ $|f(p,x_n,\varphi_1^n(q)) - f(p,x_n,g_n t)| = |f(p,x_n,g_n t)| = |t| \geqslant t_n/2$.
Insgesamt gilt also $d(q,\varphi_1^{-n}(g_n t)) \geqslant t_n/2$. Bliebe nun $\varphi_1^{-n}(g_n(\infty))$ außerhalb einer Umgebung von y, dann wäre $d(q,\varphi_1^{-n}g_n)$ nach (2.3) beschränkt, ein Widerspruch. Also gilt ii).

Insbesondere gilt $\varphi_1^{-n}(x_n) \longrightarrow y$ und daher folgt $w_n = \dot{g}_{q\,\varphi_1^{-n}x_n}(0) \longrightarrow \dot{g}_{qy}(0) = w$. Weil $x_n \longrightarrow x$ gilt $v_n = \dot{g}_{px_n}(0) \in U$ für große n und außerdem $w_n \in V$.
Nach Konstruktion ist $w_n \in W^{ss}(\varphi_1^{-n}(v_n))$, also folgt +).

Mit Hilfe der oben erwähnten Eigenschaften der Busemannfunktionen ist leicht zu sehen, daß v eine Umgebung hat mit $W_D^{ss}(v') \cap V \neq \emptyset$ für alle v' aus dieser Umgebung. Weil die Topologie von T_1H eine abzählbare Basis hat und haussdorffsch ist, kann man in der üblichen Weise ein v konstruieren mit $\overline{W_D^{ss}(v)} = T_1H$. Wie erwähnt enthält D eine axiale Isometrie, das oben genannte Kriterium von Eberlein ist also erfüllt.

Zum Beweis von 3): Sei a wie im Beweis von +). Es gibt ein $\psi \in D$ mit o.B.d.A. $\psi(a(\infty)) \notin \{a(\infty),a(-\infty)\}$.

Nach (2.3) läßt sich $\Psi a(\infty)$ mit jedem von $\Psi a(\infty)$ verschiedenen Punkt aus $H(\infty)$ geodätisch verbinden und alle diese Verbindungsgeodätischen sind nicht Rand flacher Halbebenen. Mit Hilfe von (2.7) erhalten wir eine axiale Isometrie aus D deren Achsen nicht Rand flacher Halbebenen sind und deren Endpunktmenge disjunkt ist zur Endpunktmenge von a . Wir argumentieren nun wie im Beweis von (3.3).

§5 Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten

In diesem Paragraphen sei D immer diskret und frei operierend, H/D ist also eine Mannigfaltigkeit und D ist die Fundamentalgruppe von $H/D = M$.

Das in der Einleitung erwähnte Resultat von Gromoll und Wolf, bzw. Lawson und Yau werden wir des öfteren in der folgenden Form gebrauchen:

Ist $Z \subset D$ abelsch und M kompakt, dann ist $Z \cong \mathbb{Z}^l$ mit $0 \leqslant l \leqslant \dim(M)$, und es gibt eine totalgeodätische isometrische Einbettung $i: \mathbb{R}^l \longrightarrow H$, so daß $i(\mathbb{R}^l)$ invariant ist unter Z, Z als Gruppe von Translationen auf $i(\mathbb{R}^l)$ operiert und $i(\mathbb{R}^l)/Z$ ist kompakt.

Wir werden dieses Resultat an den entsprechenden Stellen als GWLY zitieren.

5.1 Lemma. Sei $\dim(M) = 3$ und g eine geschlossene Geodätische der Periode u auf M. Dann gilt zumindest eine der folgenden Aussagen:

1) M ist axial
2) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine totalgeodätische, isometrische Immersion $i: [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ mit $i(s,t) = i(s,t+n\cdot u)$ für alle (s,t) und $i(0,t) = g(t)$
3) g ist nicht Rand einer flachen Halbebene

Beweis. Wir nehmen an, daß 3) nicht zutrifft. Mithin gibt es eine totalgeodätische, isometrische Immersion $i: [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ mit $i(0,t) = g(t)$. Wir liften g zu einer Geodätischen a in H und i zu einer Einbettung $j: [0,\infty)\times\mathbb{R} \longrightarrow H$ mit $j(0,t) = a(t)$. Wir nennen $\mathrm{im}(j) = E_o$.

a ist Achse einer Isometrie $\varphi \in D$. Mittels φ geht E_o in eine flache Halbebene E_1 mit Rand a (bis auf Parametrisierung) über etc. 2) gilt genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $E_n = E_o$.

Gibt es kein solches n, dann liegt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dicht in H. Durch jedes Element dieser Menge läuft aber eine zu a biasymptotische Geodätische. Aus (1.4) folgt deshalb, daß durch jeden Punkt von H eine zu a biasymptotische Geodätische läuft und daher hat H einen euklidischen Faktor: $H = H_1\times\mathbb{R}$ (isometrisch), $\dim(H_1) = 2$. Hierbei sind die zu a biasymptotischen Geodätischen gegeben durch $p\times\mathbb{R}$, $p \in H_1$. a selber sei durch $p_o \in H_1$ festgelegt.

Existiert ein $\psi \in D$ mit $\psi(p_o\times\mathbb{R}) = p_1\times\mathbb{R}$ mit $p_1 \neq p_o$ dann kann D nicht diskret sein. Denn die $\varphi^{-n}\psi\varphi^n(p_o)$ sind alle verschieden und $d(\varphi^{-n}\psi\varphi^n(p_o),p_o) = d(p_1,p_o)$.

Ist $\psi(a) = a$ für alle $\psi \in D$, dann ist M axial. Ist M nicht axial, dann gibt es ein $\psi \in D$, daß die Aufspaltung $H_1\times\mathbb{R}$ nicht invariant läßt. Dann hat H aber einen mindestens zweidimensionalen euklidischen Faktor. Weil $\dim(H) = 3$ ist H also flach. Ist M flach und nicht axial dann gilt 2) (siehe [20]).

Ein Lift a einer geschlossenen Geodätischen der Periode u

ist Achse einer Isometrie $\varphi \in D$ mit $\varphi(a(t)) = a(t + u)$. Wir nennen φ ein durch diese geschlossene Geodätische definiertes Element von D. Je zwei durch eine geschlossene Geodätische definierte Elemente aus D sind zueinander konjugiert.

<u>5.2 Satz.</u> Sei M kompakt, $\dim(M) = 3$. Dann ist eine geschlossene Geodätische genau dann Rand einer flachen Halbebene, wenn eine (nicht triviale) Potenz eines durch sie definierten Elementes aus D in einer zu $\mathbb{Z}^2$ isomorphen Untergruppe von D enthalten ist.

<u>Bemerkung.</u> Sind alle nicht trivialen abelschen Untergruppen von D unendlich zyklisch, dann ist also keine geschlossene Geodätische Rand einer flachen Halbebene. Thurston vermutet sogar, daß M unter dieser Voraussetzung eine Metrik konstanter negativer Krümmung besitzt (siehe [17]). Nach Eberlein wäre M dann eine visibility-Mannigfaltigkeit.

<u>Beweis.</u> Ist φ ein durch die geschlossene Geodätische definiertes Element, dann können wir durch Übergang zu einer äquivalenten geschlossenen Geodätischen annehmen, daß kein $\psi \in D$ existiert mit $\psi^l = \varphi$ und $l \geqslant 2$.
Die geschlossene Geodätische heiße g und habe die Periode u . Ist g Rand einer flachen Halbebene, dann kann nur 2) aus (5.1) zutreffen, denn M ist nicht axial.
Mit v_n bezeichnen wir $(0,1)$ als Tangentialvektor

von $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ mit Fußpunkt in $(n,0)$. Vermöge i sehen wir v_n als Tangentialvektor von M an. Weil T_1M kompakt ist, existiert eine Teilfolge $\{v_{n_k}\}$, die gegen ein $v \in T_1M$ konvergiert. Nach (5.1) gibt es ein $z \in \mathbb{N}$ mit $F_{zu}(v_n) = v_n$.

Wir können deshalb ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so daß $d_1(F_t(v_{n_l}),F_t(v_{n_m})) \leqslant \eta/100$ für $l,m \geqslant N$ (d_1 ist der kanonische Abstand auf T_1M, η ist der Injektivitätsradius von M) und alle t. Wir wählen $l > m > N$ fest, so daß $|l - m| \geqslant 100\eta$. Die durch v_{n_l} und v_{n_m} bestimmten Geodätischen seien mit g_l und g_m bezeichnet, sie sind also beide geschlossen von der Periode zu. Auf Grund unserer Wahl von l und m gilt $d(g_lt,g_mt) \leqslant \eta/100$. g_lt und g_mt können also mit der eindeutig bestimmten Kürzesten verbunden werden.

a sei ein Lift von g und j ein Lift von i mit $j(0,t) = a(t)$. Sei $\varphi \in D$ das wohlbestimmte Element mit $\varphi(a(t)) = a(t+u)$. φ ist ein durch g definiertes Element. $j(n_l,\ )$ ist ein Lift von g_l, $j(n_m,\ )$ ist ein Lift von g_m. Es ist $\varphi^z(j(s,t)) = j(s,t+zu)$. Wie wir gerade gesehen haben, gibt es auch einen Lift b von g_m mit $d(j(n_l,t),b(t)) \leqslant \eta/100$ für alle t. Insbesondere sind also $j(n_l,\ )$ und b biasymptotisch, daher $d(j(n_l,t),b(t)) = d = \text{konstant}$.

Weil b Lift von g_m ist gibt es ein $\psi \in D$ mit $\psi(j(n_m,t)) = b(t)$ für alle t. Daher

$\psi\varphi^z(j(n_m,t)) = \psi(j(n_m,t+zu)) = b(t+zu)$ und

$d(\varphi^z\psi(j(n_m,t)),j(n_l,t+zu)) = d(\varphi^z(b(t)),j(n_l,t+zu))$

$= d(b(t), j(n_1, t)) \leqslant \eta/100$. Daraus folgt aber
$\varphi^z \psi(j(n_m, t) = \psi \varphi^z(j(n_m, t))$ und daher insgesamt
$\varphi^z \psi = \psi \varphi^z$.

Wäre ψ eine Potenz von φ , dann wäre a Achse von ψ und $d(j(n_m, t), a) = d(b(t), a) \leqslant d(j(n_1, t), a) + \eta/100$ im Widerspruch zur Wahl von l und m. Damit ist eine Richtung bewiesen. Die umgekehrte Richtung ist der Beweis von GWLY, siehe z.B. [3].

<u>5.3 Satz.</u> Sei M kompakt, dim(M) = 3 . Dann sind genau dann alle geschlossenen Geodätischen auf M Rand flacher Halbebenen, wenn die universelle Überlagerung H von M einen euklidischen Faktor spaltet (isometrisch): $H = H_1 \times \mathbb{R}$.

<u>Beweis.</u> Aus (5.2) und GWLY schließen wir, daß wir die flache Ebene $\mathbb{R}^2$ totalgeodätisch und isometrisch einbetten können, falls alle geschlossenen Geodätischen Rand flacher Halbebenen sind. Und zwar können wir die Einbettung so wählen, daß $\mathbb{Z}^2 \subset D$ als Gruppe von Translationen auf dieser Ebene operiert. Durch Übergang zu einer zu $\mathbb{Z}^2$ isomorphen Untergruppe von $\mathbb{Z}^2$ können wir annehmen, daß die Elemente aus $\mathbb{Z}^2$ die Normalenrichtungen der eingebetteten Ebene nicht vertauschen. Wir wählen einen Punkt p der Ebene fest aus und erhalten durch Anwendung von $\mathbb{Z}^2$ ein Gitter auf dieser Ebene.
Nach (2.7) sind alle Geodätischen Rand flacher Halbebenen. Wir betrachten nun die Menge X der Tangentialvektoren

in p, die transversal zur Ebene stehen. Die durch ein $v \in X$ bestimmte Geodätische ist Rand einer flachen Halbebene, und diese schneidet die Ebene in einem von p ausgehenden geodätischen Strahl (d.h. in einer auf $[0,\infty)$ parametrisierten Geodätischen). Dieser Strahl bestimmt einen Tangentialvektor der Ebene in p.

i) Bilden zwei auf diese Weise durch ein festes $v \in X$ bestimmte Vektoren w_1 und w_2 einen Winkel α mit $0 < \alpha < \pi$, dann hat H einen euklidischen Faktor.

Die durch w_1 und w_2 bestimmten geodätischen Strahlen g und h spannen nämlich einen Kegel K in der Ebene auf. Weil die Menge der Punkte, durch die eine zu g_v biasymptotische Geodätische läuft, konvex ist und durch jeden Punkt auf g bzw. h eine zu g_v biasymptotische Geodätische läuft, bestimmt jeder Punkt dieses Kegels K eine zu g_v biasymptotische Geodätische. Nun finden wir in K einen Punkt p_n des Gitters mit $n < d(p_n,g),d(p_n,h)$. Weil $p_n = \varphi_n(p)$ ergibt eine konvergente Teilfolge der $\varphi_n^{-1}(v_n)$ die Anfangsrichtung an eine Geodätische, so daß durch jeden Punkt von H eine dazu biasymptotische Geodätische verläuft, wobei v_n der Tangentialvektor an die zu g_v biasymptotische Geodätische durch p_n sein soll. Aus (1.4) folgt i).

ii) Trifft ein auf obige Weise gebildeter geodätischer Strahl keinen Gitterpunkt, dann hat H einen euklidischen Faktor.

Sei nämlich $\varphi_n \in \mathbb{Z}^2$ so gewählt, daß $d(\varphi_n(p),p) \longrightarrow \infty$ und so daß für den geodätischen Srahl g gilt, daß

$d(\varphi_n g, p)$ beschränkt bleibt. Ist F die g bestimmende Halbebene, dann ist ein Häufungspunkt der Folge $\varphi_n(F)$ eine totalgeodätisch und isometrisch eingebettete flache Ebene F', deren Schnitt h mit der ursprünglichen Ebene keinen Gitterpunkt enthält. Deshalb liegt der $\mathbb{Z}^2$-Orbit von F' dicht in H. Mithin läüft durch jeden Punkt von H eine zu h biasymptotische Geodätische, also gilt ii).

Trifft i) nicht zu für alle Elemente aus X, dann muß der Winkel α mit $0 < \alpha < \pi/2$, den ein auf obige Weise bestimmter Vektor w mit einem fest ausgewählten Paar (v,-v) von Tangentialvektoren in p an die Ebene, stetig abhängen von w. Trifft ii) auch nicht zu, dann muß er konstant sein. Außerdem gibt es dann ein $\varphi \in \mathbb{Z}^2$ mit $\varphi(p) = g_w(t)$ für ein $t > 0$. Mit Hilfe der φ^k, $k \in \mathbb{Z}$, kostruieren wir (wie in ii)) zu jedem Element aus X eine flache Ebene, die dieses Element enthält und die zuerst gegebene Ebene in g_w schneidet. Also ergeben die zu g_w biasymptotischen Geodätischen die Aufspaltung.

<u>5.4 Korollar.</u> Sei M kompakt, dim(M) = 3 . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) F_t ist topologisch transitiv auf T_1M

2) F_t ist topologisch mischend auf T_1M

3) Die universelle Überlagerung H von M spaltet keinen euklidischen Faktor (isometrisch)

4) Es gibt ein Element der Fundamentalgruppe, so daß keine nicht triviale Potenz dieses Elementes in einer zu

$\mathbb{Z}^2$ isomorphen Untergruppe von D enthalten ist

5) M enthält eine geschlossene Geodätische, die nicht Rand einer flachen Halbebene ist

<u>5.5 Korollar.</u> Sei M kompakt, $\dim(M) = 3$. Dann gilt:

1) Es gibt auf M unendlich viele Äquivalenzklassen geschlossener Geodätischer (bez. jeder Metrik)

2) Entweder M ist flach oder die Fundamentalgruppe von M enthält eine freie Untergruppe

<u>Beweis.</u> Wir können in beiden Fällen annehmen, daß M nicht flach ist und jede Geodätische Rand einer flachen Halbebene ist, nach (5.3) spaltet die universelle Überlagerung H isometrisch als $H = H_1 \times \mathbb{R}$, wobei H_1 irreduzibel ist (denn H ist nicht flach). Insbesondere erhält jede Isometrie φ diese Spaltung, d.h. $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Ist v also ein Tangentialvektor von H und v_1 seine Projektion auf den ersten Faktor, so wird die Länge von v_1 durch φ nicht verändert.
Wir beweisen 1): Aus (5.2) und GWLY wissen wir, daß wir den flachen $\mathbb{R}^2$ totalgeodätisch und isometrisch einbetten können, so daß auf $\mathrm{im}(\mathbb{R}^2) = E$ die Elemente einer zu $\mathbb{Z}^2$ isomorphen Untergruppe $Z \subset D$ als Translationen wirken. Weil M nicht flach ist steht E nicht senkrecht zum euklidischen Faktor. Deshalb schneiden sich E und H_1 in einem Punkt p. Der Orbit von p unter Z ist ein Gitter in E und g_{pq} projiziert auf eine geschlossene Geodätische in M, falls q in diesem Gitter liegt. Man kann

unendlich viele Gitterpunkte q_n finden, so daß die Längen der ersten Komponenten der $\dot{g}_{pq_n}$ verschieden sind. Wären zwei der entsprechenden geschlossenen Geodätischen g_n und g_m äquivalent, dann könnte man ein $\varphi \in D$ finden, so daß g_{pq_n} und φg_{pq_m} biasymptotisch sind. Dies ist aber nicht möglich, denn dann müßten auch die ersten Komponenten von g_{pq_n} und φg_{pq_m} im beschränkten Abstand bleiben.

Zu 2): Sei $D_1 = \{\varphi_1 \mid$ es gibt φ_2 mit $(\varphi_1, \varphi_2) \in D\}$. Weil es eine kompakte Menge N gibt mit $D \cdot N = H$ gibt es auch eine kompakte Menge N_1 mit $D_1 \cdot N_1 = H_1$. Weil D_1 abzählbar ist folgt $\Omega(D_1) = T_1 H_1$ und damit erhalten wir nach (4.7), daß D_1 eine freie Untergruppe enthält. Also enthält auch D eine freie Untergruppe.

6 Verschiedenes

6.1 Satz. Sei $\dim(M) = 2$ und F_t topologisch transitiv auf T_1M. Dann ist M eine vis-Mf.

Beweis. Aus der Transitivität folgt $\Omega = T_1M$ und $L(D) = H(\infty)$. Aus $L(D) = H(\infty)$ folgt, daß M flach ist, wenn eine Geodätische Rand einer flachen Halbebene ist. Dies widerspricht der Transitivität, also ist keine Geodätische Rand einer flachen Halbebene.
Sei nun $x \in H(\infty)$ beliebig vorgegeben. Die Menge der $y \in H(\infty) - \{x\}$, mit denen sich x geodätisch verbinden läßt, ist zusammenhängend. In jeder kleinen Umgebung von x gibt es nach (2.7) auf jeder Seite von x einen Achsenendpunkt einer Isometrie aus D. Diese Achsenendpunkte lassen sich nach (2.3) geodätisch mit x verbinden. Also kann x mit jedem $y \in H(\infty) - \{x\}$ durch eine Geodätische verbunden werden. Dies ist die Definition einer vis-Mf.

Eberlein stellte in [5] die Frage, ob allgemein die topologische Transitivität des geodätischen Flußes die visibility-Eigenschaft impliziert (zumindest für kompakte M). Wie wir gerade gesehen haben, ist dies richtig, falls $\dim(M) = 2$. Für alle höheren Dimensionen gibt es Gegenbeispiele, deren Konstruktion wir jetzt beschreiben werden.

Die Beispiele von E. Heintze

Sei M eine nicht kompakte Mannigfaltigkeit konstanter negativer Krümmung, $\dim(M) \geqslant 3$ und $\mathrm{vol}(M) < \infty$. Dann hat M nur endlich viele Enden $E_1, \ldots, E_k$ und diese können wie folgt beschrieben werden: $E_i = F_i \times (0,\infty)$, wobei F_i bez. der induzierten Metrik g_i eine flache, kompakte und $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist (dies folgt aus der Existenz der "präzis invarianten" Horosphären, siehe [19]). Die Metrik von M eingeschränkt auf E_i ist dann von der Form $f_i(t)g_i + dt^2$, wobei f_i streng monoton fallend und unendlich oft differenzierbar ist.
Sei nun $1 \leqslant l \leqslant k$ und $t_1, \ldots, t_l \in (0,\infty)$ fest gewählt. $h: \{1,\ldots,l\} \longrightarrow \{1,\ldots,k\}$ sei injektiv. Wir setzen $M' = M - \bigcup_{i=1}^{l} F_{h(i)} \times (t_i, \infty)$. M' ist also eine Mannigfaltigkeit mit Rand und die Randkomponenten sind $F_{h(1)}, \ldots, F_{h(l)}$. Wir wählen ein zweites Exemplar M'_1 von M' und verheften die beiden Exemplare an den Rändern (wobei $(f,t_i) \in M'$ mit $(f,t_i) \in M'_1$ identifiziert wird, falls $f \in F_{h(i)}$). Die so enstehende Mannigfaltigkeit nennen wir N. In der Nähe der Verklebungsstellen kann die von M' bzw. M'_1 herrührende Metrik wie folgt beschrieben werden:

$$g = \begin{cases} f_{h(i)}(t)g_{h(i)} + dt^2 & \text{für } t \leqslant t_i \\ f_{h(i)}(2t_i - t)g_{h(i)} + dt^2 & , t \geqslant t_i \end{cases}$$

Wir glätten $k_i(t) = \begin{cases} f_{h(i)}(t) & , t \leqslant t_i \\ f_{h(i)}(2t_i - t) & , t \geqslant t_i \end{cases}$

so, daß die geglättete Funktion strikt konvex bleibt, in t_i ein positives Minimum hat und außerhalb einer Umgebung von t_i mit k_i übereinstimmt. Die so entstehende Mannigfaltigkeit N' hat nicht positive Krümmung und ist kompakt, falls $k = 1$, bzw. von endlichem Volumen, falls $k < 1$. Die $F_{h(i)} \times \{t_i\}$ sind totalgeodätisch und isometrisch eingebettete, kompakte flache Untermannigfaltigkeiten der Dimension $n - 1 \geqslant 2$. Also ist N' keine vis-Mf . Die in dieser Arbeit bewiesenen Resultate zeigen folgendes:

1) Die geschlossenen Geodätischen liegen dicht in T_1N'
2) Der geodätische Fluß ist topologisch mischend auf T_1N'
3) Die Fundamentalgruppe von N' enthält freie Untergruppen

Bemerkungen. i) Das Ziel E. Heintzes bei der Konstruktion dieser Beispiele war, Mannigfaltigkeiten nicht positiver Krümmung zu finden, die keine lokalsymmetrische Metrik nicht positiver Krümmung tragen. Die kompakten N' haben diese Eigenschaft: Es gibt einerseits Elemente φ aus der Fundamentalgruppe, so daß keine nicht triviale Potenz von φ in einer zu $\mathbb{Z}^2$ isomorphen Untergruppe der Fundamentalgruppe enthalten ist. Andererseits gibt es ψ aus der Fundamentalgruppe, die in einer zu $\mathbb{Z}^2$ isomorphen Untergruppe enthalten sind.

ii) E. Heintze zeigte, daß die Zusammenhangskomponente des Einselementes der Isometriegruppe von H eine halbeinfache Liegruppe vom nicht kompakten Typ ist, falls der geodätische Fluß topologisch transitiv ist auf T_1M , siehe

[12] . Ist M also lokal homogen und der geodätische Fluß topologisch transitiv auf T_1M , dann ist M lokal symmetrisch vom Rang 1 . Insbesondere ist die Krümmung von M strikt negativ und daher M eine vis-Mf.

Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkte

Für unsere Beweise war neben anderem das folgende Prinzip wichtig: Ist g eine Geodätische in H, $x \in H(\infty)$ verschieden von den Endpunkten von g und gibt es ein e mit $\sphericalangle_{g(t)}(\dot{g}(t),x) = e$ für alle t, dann ist g Rand einer flachen Halbebene. Mir ist nicht bekannt, ob dies auch für Mannigfaltigkeiten ohne Fokalpunkte gilt. Für diese kann man aber beispielsweise mit den in dieser Arbeit verwandten Methoden folgendes beweisen:

6.2 Satz. Sei M eine Mannigfaltigkeit ohne Fokalpunkte. Es gebe auf M eine geschlossene Geodätische g und ein t, so daß $K(E) < 0$ für alle Tangentialebenen E, die $\dot{g}(t)$ enthalten. Dann ist entweder M axial oder die Fundamentalgruppe von M enthält eine freie Untergruppe.

Literaturverzeichnis

1. Anosov,D.V.: Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature. Trudy. Mat. Inst. Steklov 90,(1967) (Russisch). Englische Übersetzung: Proc. Steklov Inst. Math., Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. 1969

2. Avez,A.: Variétés riemanniennes sans points focaux. C. R. Acad. Sc. Paris 270, 188 - 191 (1970)

3. Cheeger,J.,Ebin,D.G.: Comparison theorems in riemannian geometry. Amsterdam - Oxford - New york: North Holland / American Elsevier 1975

4. Eberlein,P.: Geodesic flows on negatively curved manifolds I. Annals of Math.95, 492 - 510 (1972)

5. Eberlein,P.: Geodesic flows on negatively curved manifolds II. Transactions of the Amer. Math. Soc. 178, 57 - 82 (1973)

6. Eberlein,P.: Geodesic flow in certain manifolds without conjugate points. Transactions of the Amer. Math. Soc. 167, 151 - 170 (1972)

7. Eberlein,P.: Some properties of the fundamental group of a fuchsian manifold. Inventiones math. 19, 5 - 13 (1973)

8. Eberlein,P.,O'Neill,B.: Visibility manifolds. Pacific J. of Math. 46, 45 - 109 (1973)

9. Gromoll,D.,Klingenberg,W.,Meyer,W.: Riemannsche Geometrie im Großen. Lecture Notes in Mathematics 55, Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1968

10. Gromoll,D.,Wolf,J.: Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental groups in manifolds of nonpositive curvature. Bull. Amer. Math. Soc. 77, 545 - 552 (1971)

11. Hedlund,G.: The dynamics of geodesic flows. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 241 - 260 (1939)

12. Heintze,E.: Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. Habilitationsschrift, Bonn 1976

13. Lawson,H.B.,Yau,S.T.: Compact manifolds of nonpositive curvature. J. Differential Geometry 7, 211 - 228 (1972)

14. Lehner,J.: Discontinuous groups and automorphic fu functions. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. 1964

15. Milnor,J.: A note on curvature and fundamental group. J. Differential Geometry 2, 1 - 7 (1968)

16. Preissmann,A.: Quelques propriétés globales des espaces de Riemann. Comment. Math. Helv. 15, 175 - 216 (1943)

17. Thurston,W.P.: Vortrag in Helsinki. Helsinki 1978

18. Tits,J.: Free subgroups of linear groups. J. of Algebra 20, 250 - 270 (1972)

19. Wielenberg,N.J.: Discrete moebius groups: Fundamental polyhedra and convergence. Amer. J. of Math. 99, 861 - 877 (1977)

20. Wolf,J.: Spaces of constant curvature. New York - Toronto - London: Mc Graw - Hill 1967

21. Yau,S.T.: Non-existence of continuous convex functions on certain riemannian manifolds. Math. Ann. 207, 269 - 270 (1974)