BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN
Herausgeber:
E. BRIESKORN, J. FREHSE, ST. HILDEBRANDT
F. HIRZEBRUCH, W. KLINGENBERG, R. LEIS,
I. LIEB, E. PESCHL, H. UNGER, W. VOGEL

Nr. 102

Beiträge zur Differentialgeometrie, Heft 1.

Werner Ballmann

Der Satz von Lusternik und Schnirelmann

Hans-Heinrich Matthias

Eine Finslermetrik auf S^2 mit nur zwei geschlossenen Geodätischen

BONN 1978

DER SATZ VON LUSTERNIK UND SCHNIRELMANN

von Werner Ballmann

Das Problem der Existenz geschlossener Geodätischer auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten wird schon seit den Anfängen des qualitativen Studiums von Differentialgleichungen untersucht. Erste Resultate stammen von Hadamard, der die Existenz einer geschlossenen Geodätischen auf kompakten Flächen negativer Krümmung zeigte, und von Poincaré, der einen bis heute umstrittenen Beweis für die Existenz einer geschlossenen Geodätischen auf einer analytischen konvexen Fläche veröffentlichte. Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des Satzes von Lusternik und Schnirelmann, der mit Recht als eines der besten Resultate dieser Theorie angesehen werden kann. Der Satz besagt:

Auf S^2 gibt es bezüglich jeder Metrik drei doppelpunktfreie geschlossene Geodätische.

Die Abschätzung ist scharf, denn es gibt sogar - wie Morse zeigte - bestimmte Ellipsoide mit nur drei verschiedenen doppelpunktfreien geschlossenen Geodätischen, cf. [Kl].

Die Darstellung lehnt sich inhaltlich eng an das Buch [Lu] an.

- In Abschnitt 1 werden einige elementare Eigenschaften Riemannscher Mannigfaltigkeiten und ihre Anwendung auf den freien Schleifenraum diskutiert. Wir erhalten einen einfachen Beweis des Satzes von Lusternik und Fet, cf. [FL]

- In Abschnitt 2 wird eine spezielle Deformation für doppelpunktfreie Kurven definiert. Diese Deformation wurde von Lusternik und Schnirelmann eingeführt, cf. [Lu] . Die Darstellung ist etwas ausführlicher als in [Lu] .
- In Abschnitt 3 werden einige Beweisteile des Beweises des Hauptsatzes vorgezogen, um den Beweis selber durchsichtiger zu gestalten. Die Formulierung erlaubt die Übertragung einiger Resultate auf beliebige kompakte Flächen.
- In Abschnitt 4 schließlich wird der Beweis des Satzes von Lusternik und Schnirelmann gegeben.

In [Kl] findet sich ebenfalls ein Beweis des Satzes, jedoch benutzt Klingenberg eine andere Deformation und etwas verschiedene Hilfsmittel. In diesem Buch findet man auch eine ausführliche Darstellung der Geschichte der Theorie der geschlossenen Geodätischen sowie ein umfassendes Verzeichnis der bisher erschienenen Literatur.

1. M sei eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, ρ bezeichne die Metrik auf M, die durch die Riemannsche Struktur induziert wird. $S := [0,1]/\{0,1\}$ sei der Einheitskreis. Die Menge $C(S,M)$ aller stetigen Abbildungen $c: S \to M$ wird mit $d(c_1,c_2) = \sup\limits_{t\in S} (c_1(t),c_2(t))$ zum metrischen Raum. $PM \subset C(S,M)$ sei die Menge der stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Kurven. Auf PM sind die Funktionen $L(c) = \int_S |\dot{c}|$ und $E(c) = \int_S |\dot{c}|^2/2$ definiert. Es gilt nach der Schwarzschen Ungleichung $L(c) \leqslant \sqrt{2E(c)}$ mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $|\dot{c}|$ konstant ist.

Weil M kompakt ist, existiert eine Zahl $\eta > 0$, so daß je zwei Punkte $x, y \in M$ mit $\rho(x,y) \leqslant 2\eta$ durch ein eindeutig bestimmtes geodätisches Segment g_{xy} mit $g_{xy}(0) = x$ und $g_{xy}(1) = y$ verbunden werden können. $g_{xy}(t)$ hängt differenzierbar von x, y und t ab.

1.1 Lemma. $c_n: [0,1] \to M$ sei eine Folge stückweise stetig differenzierbarer Kurven, $c_n(0) = x_n$, $c_n(1) = y_n$ und es sei $\rho(x_n,y_n) \leqslant \eta$. Konvergieren dann $E(c_n)$ und $E(g_{x_n y_n})$ beide gegen denselben Limes l, dann besitzt c_n eine Teilfolge, die gegen ein geodätisches Segment $c: [0,1] \to M$ mit $E(c) = l$ konvergiert.

Beweis: Weil M kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge von (x_n,y_n), die wir wieder mit (x_n,y_n) bezeichnen wollen, gegen (x,y). Deshalb konvergieren die $g_{x_n y_n}$ gegen g_{xy}. Wir müssen noch zeigen, daß für alle Folgen t_n in $[0,1]$ mit $\lim t_n = t$ gilt: $\lim c_n(t_n) = g_{xy}(t)$. Sei deshalb $c_{n_j}(t_{n_j})$

eine konvergierende Teilfolge. Wir setzen $n_j = m$, $c_m(t_m) = z_m$ und $\lim z_m = z$. Dann konvergieren die $g_{x_m z_m}$ bzw. die $g_{z_m y_m}$ gegen g_{xz} bzw. g_{zy}. Hier ist natürlich $g_{x_m z_m}$ von 0 bis t_m parametrisiert und die anderen Segmente entsprechend. Nun ist

$$E(g_{xz}) + E(g_{zy}) = \lim (E(g_{x_m z_m}) + E(g_{z_m y_m})) \leqslant \lim E(c_m)$$

und $\lim E(c_m) = \lim E(g_{x_m y_m}) = E(g_{xy})$.

g_{xz} zusammengesetzt mit g_{zy} ergibt also eine Kurve, die x und y verbindet mit Energie kleiner gleich der Energie von g_{xy}. Daher stimmen die Parametrisierungen beider Kurven überein und deshalb ist $z = g_{xy}(t)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Sei $\chi > 0$ gegeben und $k \in 2\mathbb{N}$, $k \geqslant 4$ so gewählt, daß $4\chi/k \leqslant \eta^2$. Dann ist für alle $c \in P^\chi M = \{c \in PM \mid E(c) \leqslant \chi\}$ und alle $t \in S$ die Ungleichung

$$\rho^2(c(t), c(t + 2/k)) \leqslant 2E(c)2/k \leqslant \eta^2$$

erfüllt; $t + 2/k$ ist hier mod1 zu verstehen.

Wir definieren jetzt eine E-verkleinernde Deformation $D: P^\chi M \times [0,2] \longrightarrow P^\chi M$. Für $2n/k \leqslant t \leqslant 2(n+1)/k \leqslant 1$ setzen wir

$$\begin{cases} D_a(c,t) \mid [0,2n/k] = D_a(c,2n/k) \mid [0,2n/k] \\ D_a(c,t) \mid [2n/k,t] = g_{c(2n/k)c(t)} \text{ parametrisiert} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{von } 2n/k \text{ bis } t \\ D_a(c,t) \mid [t,1] \quad = c \mid [t,1]. \end{cases}$$

Sei jetzt für alle $c \in P^\chi M$ $(1/k)c$ durch $(1/k)c(t) = c(t + 1/k)$ definiert. Dann setzen wir

$$D_b(c,t) = D_a((1/k)D_a(c,1), t-1) \quad \text{für} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

D_a zusammengesetzt mit D_b ergibt die gewünschte Deformation. Es gilt

<u>1.2 Satz.</u> $D: P^{\chi}M \times [0,2] \to P^{\chi}M$ ist stetig, $E(D(c,2)) \leq E(c)$. Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn c eine geschlossene Geodätische ist.

Im Folgenden setzen wir $Dc = D(c,2)$.

<u>1.3 Lemma.</u> c_n sei eine Folge in $P^{\chi}M$, so daß $E(c_n)$ und $E(Dc_n)$ gegen denselben Limes 1 konvergieren. Dann hat c_n eine Teilfolge, die gegen eine geschlossene Geodätische der Energie 1 konvergiert.

<u>Beweis:</u> Dc_n ist eine Folge gebrochener Geodätischer, die wegen der Kompaktheit von M eine Teilfolge Dc_{n_j} besitzt, die gegen eine gebrochene Geodätische g der Energie 1 konvergiert. (1.1) impliziert, daß $g = \lim c_{n_j}$. Außerdem ist $E(g) = \lim E(c_{n_j}) = 1 = \lim E(Dc_{n_j}) = E(Dg)$. Also ist g eine geschlossene Geodätische und das Lemma bewiesen.

<u>Bemerkung:</u> D_a ersetzt $c|[2n/k, 2(n+1)/k]$ durch das jeweilige geodätische Verbindungsstück. Ist $0 \leq h \leq 1$ eine Funktion auf $P^{\chi}M$, dann kann man entsprechend eine Deformation D_a^h erklären, wobei D_a^h jeweils $c|[2n/k, 2n/k + h(c)2/k]$ ersetzt. Entsprechend können wir D_b abändern und erhalten insgesamt eine Deformation D_h, wobei $D_h(c) = c$, falls $h(c) = 0$ und $D_h(c) = Dc$, fallc $h(c) = 1$.

Als eine Anwendung von Lemma 1.3 beweisen wir

<u>1.4 Theorem (Lusternik und Fet)</u>. Auf jeder kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit existiert eine nichttriviale geschlossene Geodätische.

<u>Beweis</u>: Sei zuerst $\pi_1(M) \neq 0$ und c eine stückweise stetig differenzierbare, nicht nullhomotope, geschlossene Kurve. Es gibt $\varkappa > 0$ mit $c \in P^{\varkappa}M$. Wie oben konstruieren wir die Deformation D und setzen $\alpha = \lim E(D^n(c))$. Wäre $\alpha = 0$, dann wäre c nullhomotop. Denn eine Kurve kleiner Energie liegt in einem konvexen Ball um ihren Anfangspunkt und kann dann längs geodätischer Segmente auf ihren Anfangspunkt zusammengezogen werden. Weil aber c homotop ist zu $D^n(c)$, folgt $\alpha > 0$. (1.3) impliziert dann die Existenz einer geschlossenen Geodätischen der Energie α.

Sei nun $\pi_1(M) = 0$. Nach dem Satz von Hurewics gibt es eine kleinste Zahl k mit $1 < k \leq \dim(M)$, so daß $\pi_k(M) \neq 0$. Sei $f:(I^k, \partial I^k) \longrightarrow (M, x_o)$ eine stetig differenzierbare und nicht nullhomotope Abbildung. f definiert durch $f^*(x)(t) = f(x,t)$ eine Abbildung $f^*:(I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \longrightarrow (PM, x_o)$. Sei $\varkappa > 0$ so, daß $\mathrm{im}\, f^* \subset P^{\varkappa}M$. Wir setzen wieder $\alpha = \lim(\max\{E(D^n \mathrm{im}\, f^*)\})$. Wäre $\alpha = 0$, dann gäbe es n mit $\max\{E(D^n \mathrm{im}\, f^*)\}$ klein. Wie oben kann man dann die Kurven auf ihren Anfangspunkt zusammenziehen. D^n zusammengesetzt mit dem Zusammenziehen definiert eine Homotopie von f zu einer Abbildung g, so daß $g(x,t_1) = g(x,t_2)$ für alle $t_1, t_2 \in I$, $x \in I^{k-1}$. g kann man über eine Abbildung

$h:(I^{k-1},\partial I^{k-1}) \longrightarrow (M,x_0)$ faktorisieren. Also ist nach der Voraussetzung über die Homotopiegruppen g und mithin auch $\bar{f}$ nullhomotop. Der Widerspruch zeigt, daß $\alpha > 0$ ist. Sei nun $c_n \in D^n$ im f^* eine Kurve mit $E(Dc_n)$ maximal in D^{n+1} im f^*. Dann gilt $\lim E(c_n) = \lim E(Dc_n) = \alpha$ und (1.3) impliziert die Existenz einer geschlossenen Geodätischen der Energie α. Damit ist (1.4) bewiesen.

Bemerkung: i) Lusternik und Fet haben den Satz für allgemeinere Variationsprobleme als das geodätische Problem formuliert, cf. [FL]; der Beweis kann jedoch Wort für Wort übertragen werden.

ii) Thorbergsson bewies in [Th] eine interessante Verallgemeinerung auf nichtkompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

2. Von nun an nehmen wir an, daß M zweidimensional ist. In diesem Abschnitt werden wir die Deformation D so modifizieren, daß sie doppelpunktfreie Kurven in doppelpunktfreie Kurven überführt. Wir werden das zuerst in $\mathbf{R}^2 = \mathbb{C}$ durchführen und dann mit Hilfe von Koordinaten auf M übertragen.

Wir vereinbaren, mit dem Inneren einer geschlossenen Kurve in $\mathbb{C}$ den Abschluß der beschränkten Menge zu bezeichnen, die durch die Kurve aus der Ebene herausgeschnitten wird.

Sei c eine doppelpunktfreie, stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve in der Ebene, $t_1 \neq t_2 \in S$. $c|[t_1,t_2]$ bezeichnen wir mit c_1, den anderen Teil von c nennen wir c_2. Wir definieren die Ellipse E wie folgt :

$$e \in E \iff \rho(a,e) + \rho(b,e) = L(c_1),$$

wo $a = c(t_1)$ und $b = c(t_2)$. Dann ist c_1 im Inneren von E enthalten. Für $z \neq a,b$ definieren wir

$$f(z) = \ln((z-a)/(z-b)) + \pi i = u(z) + iv(z).$$

v ist nur mod $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, definiert. Die Linien v = const sind Segmente von Kreisen, die a und b verbinden. Die Linien u = const sind dazu senkrechte Kreise. Es ist $v(z) = 0 \bmod 2\pi k$ genau dann, wenn $z \in ab$, wo ab die a und b verbindende Strecke ist.

Sei w eine geschlossene, stetig differenzierbare Kurve, die c_1 nicht schneidet. Dann ist

$$\int_w f'(z)dz = \int_w (1/(z-a) - 1/(z-b))dz = 0.$$

Daher können wir f auf $\mathbb{C} - c_1$ eindeutig definieren : außerhalb E wählen wir $0 < v < 2\pi$ und setzen f stetig fort. u und v definieren dann Koordinaten auf $\mathbb{C} - c_1$.

Für $\alpha \geqslant 0$ definieren wir $g_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha \arctan(x/\alpha) & \text{für } \alpha > 0 \\ 0 & \text{für } \alpha = 0. \end{cases}$$

Sei $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ maximal so gewählt, daß $v = \gamma_0$ und $v = 2\pi - \gamma_0$ innerhalb E liegen und $\gamma_0 \leqslant \pi/4$. Für $\gamma \in [0, \gamma_0]$ definieren wir $\phi_\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi_\gamma(x) = \begin{cases} \gamma + g_\alpha(x-\gamma) & \text{für } x \leqslant \gamma \\ x & \text{für } \gamma \leqslant x \leqslant 2\pi - \gamma \\ 2\pi - \gamma + g_\alpha(x - 2\pi + \gamma) & \text{für } x \geqslant 2\pi - \gamma, \text{ wo } \alpha = \gamma/\pi. \end{cases}$$

ϕ_γ ist stetig und für $\gamma > 0$ streng monoton wachsend und stetig differenzierbar mit $\phi_\gamma' \leqslant 1$. Es ist $\lim\limits_{x \to -\infty} \phi_\gamma(x) = \gamma/2$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi_\gamma(x) = 2\pi - \gamma/2$.

Sei nun D_{ab} die Deformation, die c_1 durch ab ersetzt (vgl. Abschnitt 1), $\gamma \in [0, \gamma_0]$ und $\gamma > 0$, falls $\gamma_0 > 0$. Sei $p \in c_2$ mit den Koordinaten (u,v). Dann setzen wir

$$D^*_{ab}(p) = (u, \phi_\gamma(v)).$$

D^*_{ab} läßt sich als Identität stetig auf ab fortsetzen. Die so entstandene Kurve

$$D^\sim_{ab}(c) = D^*_{ab}(D_{ab}(c))$$

ist wieder doppelpunktfrei. Punkte außerhalb E bleiben fest, d.h. die Konstruktion ist lokal. Punkte, die nicht festbleiben, werden in das Gebiet F geschoben, das von $v = \gamma$ und $v = 2\pi - \gamma$ begrenzt wird.

Wir schätzen die Energie der neuen Kurve ab. Sei

$X_p \neq 0$ ein Tangentialvektor in p mit Koordinaten (x_u, x_v) bzgl. f. Weil f holomorph ist, berechnet sich die euklidische Länge von X_p durch

$$|X_p| = (x_u^2 + x_v^2)/|f'(p)| = |p-a|\,|p-b|\,(x_u^2 + x_v^2)/|b-a|.$$

Sei $(D^*_{ab})_*(X_p) = Y_q$, dann ist $y_u = x_u$, $y_v \leqslant x_v$. Daher ist

$$|Y_q|/|X_p| \leqslant |q-a|\,|q-b|/(|p-a|\,|p-b|).$$

Die u-Koordinate bleibt fest, deshalb gilt

$|p-a|/|p-b| = |q-a|/|q-b|$. Mithin gilt

$$|Y_q|/|X_p| \leqslant |(q-a)/(p-a)|^2 = |(q-b)/(p-b)|^2.$$

O.B.d.A. nehmen wir an, daß $|p-a| \leqslant |p-b|$. Liegt p außerhalb F, dann ist $|q-a| \leqslant |p-a|$. Liegt p innerhalb F, dann gilt $|q-a|/|p-a| \leqslant 1/\cos\gamma \leqslant 1 + \gamma^2$. Insgesamt erhalten wir

$$(*) \quad E(D^{\sim}_{ab}(c)) \leqslant (1 + \gamma^2)^2 E(D_{ab}(c)) \leqslant (1 + 3\gamma^2) E(D_{ab}(c)).$$

Wir gehen nun daran, diese Deformation auf doppelpunktfreie Kurven in M zu übertragen. Für die dann notwendig werdenden Abschätzungen benötigen wir

2.1 Lemma. Sei a, b, c ein geodätisches Dreieck auf der Sphäre mit Krümmung $\kappa^2 > 0$ und $L(c) \leqslant \pi/3\kappa$, $L(a) + L(b) \leqslant 2/\kappa$. Bezeichnen wir die Ecken mit A, B, C in der üblichen Weise, dann kann man die Höhe m von c nach C abschätzen durch $L^2(m) \leqslant 2(L^2(a*b) - L^2(c))$, wo $a*b$ die aus a und b zusammengesetzte Kurve ist.

Beweis: O.B.d.A. $\kappa = 1$. Wegen $L(a) + L(b) \leqslant 2$ ist $L(m) \leqslant 1$. Sei nun D der Fußpunkt von m und c_A die Strecke

von A nach D, c_B diejenige von D nach B. Dann gilt
$1 - L^2(m)/4 \geqslant \cos L(m) = (\cos L(a))/\cos L(c_B) \geqslant 1 - L^2(a) + L^2(c_B)$,
also $L^2(m) \leqslant 4(L^2(a) - L^2(c_B))$. Genauso rechnet man mit b und c_A. Durch Aufaddieren erhält man die gewünschte Ungleichung.

Sei nun $\varkappa^2 = \max\{K(p) | p \in M\}$, K die Krümmung. Dann gilt für Fermikoordinaten in M die Ungleichung

$$\cos^2(\varkappa y)(dx^2 + dy^2) \leqslant g(x,y) \leqslant \cosh^2(\varkappa y)(dx^2 + dy^2).$$

Sei $\varkappa > 0$ fest vorgegeben und η wie in Abschnitt 1, aber so, daß $\varkappa\eta \leqslant \pi/4$. Sei $k \in 2\mathbb{N}$, $k > 4$, so daß $4\chi/k \leqslant (\eta/8)^2$. c sei eine doppelpunktfreie Kurve in $P^\chi M$. Nun bestand $D(c,)|[0,2/k]$ darin, $c_1 = c|[0,2/k]$ durch die Verbindungsgeodätische g von $a = c(0)$ zu $b = c(2/k)$ zu ersetzen. Wir parametrisieren g nach der Bogenlänge und setzen g an beiden Enden um $\eta/4$ fort. Auf der $(\eta/4)$-Tubenumgebung U von g führen wir Fermikoordinaten ein, wobei g der x-Koordinate entsprechen soll. Dann ist c_1 in U enthalten und die Länge von c_1 gemessen bezüglich der euklidischen Metrik erfüllt $L_e(c_1) \leqslant 2L(c_1) \leqslant 2\eta/8$ (wir vereinbaren, Größen, die sich auf die euklidische Metrik beziehen, mit e zu indizieren). Deshalb ist die Ellipse E (bzgl. der euklidischen Metrik definiert) in den Koordinaten enthalten, und wir können die Deformation $D^\sim_{ab}$ für vorgegebenes γ erklären (nur innerhalb E wurde die Kurve geändert).

Ist nun m die maximale y-Koordinate eines Punktes von c_1, so erhält man durch Vergleich mit der Sphäre mit Krümmung $\varkappa^2$ mit Hilfe von (2.1) die Abschätzung

$km^2/8 \leq k(L^2(c_1)-L^2(g_{ab}))/2 \leq E(c_1)-E(g_{ab}) = E(c)-E(D_{ab}(c))$; diese Differenz bezeichnen wir mit α. Wir wählen nun a priori k so groß, daß $48\varkappa^2 8\chi/k \leq 1/4$ und (abhängig von der Kurve c) γ so klein, daß $3\gamma^2\chi \leq \alpha/4$. Für die Energie von $D^{\sim}_{ab}(c)$ erhalten wir dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} E(D^{\sim}_{ab}(c)) &\leq \cosh^2(\varkappa m) E_e(D^{\sim}_{ab}(c)) \\ &\leq (1+3\gamma^2)\cosh^2(\varkappa m) E_e(D_{ab}(c)) \quad \text{wegen } (*) \\ &\leq (1+3\gamma^2)(\cosh^2(\varkappa m)/\cos^2(\varkappa m)) E(D_{ab}(c)) \\ &\leq (1+3\gamma^2)(1+12\varkappa^2 m^2) E(D_{ab}(c)) \\ &\leq E(D_{ab}(c)) + \alpha/2, \text{ mithin also} \end{aligned}$$

$$(**) \quad E(c) - E(D^{\sim}_{ab}(c)) \geq \alpha/2 .$$

Genauso übertragen wir $D(c, \ )| [2/k, 4/k]$ etc. Insgesamt erhalten wir eine doppelpunktfreie Kurve $D^{\sim}c$ und es gilt $E(D^{\sim}c) \leq E(c)$ mit Gleichheit dann und nur dann, wenn c eine doppelpunktfreie geschlossene Geodätische ist. Im letzteren Falle ist $D^{\sim}c = c$.

<u>Bemerkung:</u> $D^{\sim}$ hängt nicht von der Wahl der Richtung der y-Koordinate der Fermikoordinaten ab.

<u>2.2 Satz.</u> Sei $c_n \subset P^{\chi}M$ eine Folge doppelpunktfreier Kurven und es sei $\lim E(D^{\sim}c_n) = \lim E(c_n) = l > 0$. Dann besitzt c_n eine konvergente Teilfolge und der Grenzwert ist

i) eine doppelpunktfreie geschlossene Geodätische der Energie l, falls M orientierbar .

ii) eine doppelpunktfreie oder zweifach durchlaufene doppelpunktfreie geschlossene Geodätische der Energie l, falls M nicht orientierbar.

Beweis: Das c_n gegen eine geschlossene Geodätische der Energie 1 konvergiert, beweist man mit Induktion über $D(c,\ )|[\bar{n}/k,(n+2)/k]$ mit Hilfe von (* *), (1.1) und (1.3). Die Aussagen i) und ii) sind geometrisch klar, weil M zweidimensional ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Weil E nicht stetig ist, ist eine stetige Wahl von γ in Abhängigkeit von c im Allgemeinen nicht möglich. Deshalb ist $D^{\sim}$ nicht stetig erklärt. Trotzdem kann man mit Hilfe von $D^{\sim}$ stetige Homotopien von Abbildungen definieren, falls diese Abbildungen gewisse Voraussetzungen erfüllen.

Sei X ein topologischer Raum und $f: X\times S \longrightarrow M$ eine stetige Abbildung, so daß eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ von S existiert und für alle $x \in X$ gilt $f(x,\ )|[t_i,t_{i+1}]$ ist stetig differenzierbar. Für festes x ist also $f(x,\ )$ aus PM. f induziert deshalb eine stetige Abbildung $f^{\sim}: X \longrightarrow PM$. Wir nehmen an, daß im $f^{\sim} \subset P^{x}M$ und daß für alle x gilt $f(x,\ )$ ist konstant oder doppelpunktfrei. Außerdem nehmen wir an, daß die Abbildung $f': X\times[t_i,t_{i+1}] \longrightarrow M$, $(x,t) \longmapsto f(x,\ )'(t)$ stetig ist. Dann kann man γ stetig abhängend von $f(x,\ )$ wählen. Erweitert man die Definition von $D^{\sim}$ auf die konstanten Kurven durch $D^{\sim}c = c$, so kann man mit $D^{\sim}$ die Funktion $f^{\sim}$ stetig deformieren (die Fermikoordinaten hängen stetig von der Kurve ab, cf. die obige Bemerkung). Die sich ergebende Funktion $D^{\sim}(f^{\sim})$ hat dann wieder dieselben Eigenschaften wie $f^{\sim}$.

2.3 Satz. Sei $0 < l < \chi$ und U eine Umgebung der Menge G der

i) doppelpunktfreien geschlossenen Geodätischen der Energie l, falls M orientierbar

ii) doppelpunktfreien oder zweifach durchlaufenen doppelpunktfreien geschlossenen Geodätischen der Energie l, falls M nicht orientierbar.

Dann gibt es zu U ein $\alpha > 0$, so daß für jede Abbildung $f^\sim$ wie oben mit $\operatorname{im} f^\sim \subset P^{l+\alpha}M$ gilt

$\operatorname{im} D^\sim(f^\sim) \subset U \cup P^{l-\alpha}M$.

Beweis: Unabhängig von der Wahl von γ gibt es $U_1 \subset U$ mit c doppelpunktfrei, $c \in U_1 \Longrightarrow D^\sim c \in U$. Denn sonst gäbe es Folge $c_n \in U$, c_n doppelpunktfrei, $\lim c_n = g \in G$ und $D^\sim c_n \notin U$. Aber $\lim c_n = g$ impliziert $\lim D^\sim c_n = g$, wie man an der Definition von $D^\sim$ erkennt. Also gibt es U_1. Wäre nun die Aussage des Satzes falsch, dann würde eine Folge doppelpunktfreier Kurven c_n existieren mit $c_n \notin U_1$, $\lim E(c_n) = l$ und $\lim E(D^\sim c_n) = l$. Aber (2.2) impliziert dann die Existenz einer Teilfolge von c_n, die gegen ein Element von G konvergiert. Das ist ein Widerspruch.

Bemerkung: Genauso kann man D_h übertragen. Statt Abbildungen $f^\sim$ wie oben zu betrachten, nehmen wir nun Tupel $(f^\sim, h_1, \dots, h_n)$, wo $f^\sim : X \longrightarrow M$ wie oben und $h_i : X \longrightarrow [0,1]$, so daß für alle $x \in X$ ein i existiert mit $h_i(x) = 1$. Wir erhalten dann

2.3' Satz. Seien die Voraussetzungen wie in (2.3). Dann gibt es zu U und n ein $\alpha > 0$, so daß für jedes Tupel $(f^{\sim}, h_1, \ldots, h_n)$ wie oben mit $\operatorname{im} f^{\sim} \subset P^{1+\alpha}M$ gilt

$$\operatorname{im} D^{\sim}_{h_1}(D^{\sim}_{h_2}(\ldots D^{\sim}_{h_n}(f^{\sim})\ldots)) \subset U \cup P^{1-\alpha}M.$$

<u>Beweis:</u> Wie in (2.3) erhalten wir für $1 \leqslant i \leqslant n$ Umgebungen $U := U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n$ von G mit $D^{\sim}_{h_i}(U_i) \subset U_{i-1}$. Außerhalb U_n gibt es nach (2.3) α, so daß für doppelpunktfreie Kurven c mit $E(c) \leqslant 1+\alpha$ gilt $E(D^{\sim}c) \leqslant 1-\alpha$. Ist nun $\operatorname{im} f^{\sim} \subset P^{1+\alpha}M$ und $c = f^{\sim}(x)$, $h_n(x) = 1$, dann ist $D^{\sim}_{h_n} c = D^{\sim}c$, also $E(D^{\sim}_{h_1}(\ldots D^{\sim}_{h_n} c)..) \leqslant E(D^{\sim}_{h_n} c) = E(D^{\sim}c) \leqslant 1-\alpha$.
Oder $h_n(x) \neq 1$. Entweder ist dann $D^{\sim}_{h_n} c \in U_{n-1}$ und bleibt dann während der folgenden Deformationen in U, oder $D^{\sim}_{h_n} c \notin U_{n-1}$. Dann wiederholen wir dieses Argument mit $D^{\sim}_{h_{n-1}}$. Weil nun aber mindestens für ein i gilt $h_i(x) = 1$, wandert c entweder in U hinein, oder die Energie wird kleiner gleich $1-\alpha$. Damit ist der Satz bewiesen.

<u>Bemerkung:</u> Ist $G = \emptyset$, so kann man in (2.3) und (2.3') $U = \emptyset$ wählen.

3. Die doppelpunktfreien geschlossenen Geodätischen werden wir als eine Art kritischer Punkte der E-Funktion erhalten. Damit verschiedenen kritischen Punkten auch geometrisch verschiedene doppelpunktfreie geschlossene Geodätische entsprechen, müssen wir zu einem Restklassenraum übergehen.

Auf PM operiert S durch $(\exp(2\pi it)c)(t') = c(t+t')$ und $\mathbb{Z}_2$ durch Umkehrung der Laufrichtung. Zusammen ergibt dies eine O(2)-Aktion auf PM. Ist $\varphi \in O(2)$, dann ist g genau dann eine doppelpunktfreie geschlossene Geodätische, wenn φg eine doppelpunktfreie geschlossene Geodätische ist. Außerdem sind g und g' genau dann geometrisch verschiedene doppelpunktfreie geschlossene Geodätische, wenn kein $\varphi \in O(2)$ existiert mit $\varphi g = g'$. Die O(2)-Aktion ist E-äquivariant, also ist E auf $\Sigma M = PM/O(2)$ definiert. ΣM versehen wir mit der Metrik

$$r(\bar{c}_1,\bar{c}_2) = \inf\{\rho(c',c'')\,|\,c'\in\bar{c}_1, c''\in\bar{c}_2\}.$$

Die Restklassenprojektion $p: PM \longrightarrow \Sigma M$ ist dann stetig und offen. Wie oben seien die Mengen $\Sigma^{\varkappa}M$ für $\varkappa \geq 0$ definiert.

Um die Existenz verschiedener kritischer Punkte der E-Funktion auf ΣM zu erhalten, werden wir homologische Hilfsmittel benützen. Wenn wir von der Homologie von ΣM sprechen, so meinen wir die Homologie bezüglich des projizierten Komplexes mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$. Das Konzept des projizierten Komplexes stammt von Alber, cf. [Al]. Der projizierte Komplex ist ein Unterkomplex des singulären Komplexes und wird definitionsgemäß von den Simplizes erzeugt, die einen Lift nach PM haben.

<u>3.1 Lemma.</u> Ist $G \subset \Sigma M$ eine endliche Menge von geschlossenen Geodätischen, dann gibt es eine Umgebung von G, die nur nullhomologe 1-Zykel enthält.

<u>Beweis:</u> Unter der Annahme, daß jede Umgebung von G einen nicht nullhomologen 1-Zykel enthält, zeigen wir, daß dann auch G einen solchen enthält. Das ist dann natürlich ein Widerspruch zur Endlichkeit von G.

Sei $p^{-1}(G) = G'$. Dann ist G' die Vereinigung von endlich vielen disjunkten kompakten Mengen, nämlich den O(2)-Orbiten der Elemente von G'. Jeder Orbit selber ist disjunkte Vereinigung zweier zusammenhängender kompakter Mengen, nämlich den jeweiligen S-Orbiten, die sich unter der $\mathbb{Z}_2$-Aktion entsprechen. Insgesamt ist also G' die Vereinigung endlich vieler zusammenhängender kompakter Mengen $G'_1,\dots,G'_n$. Deshalb können wir eine Umgebung U von G wählen, so daß $U' = p^{-1}(U)$ Vereinigung von Mengen U'_i ist mit $G'_i \subset U'_i$ und $U'_i \cap U'_k = \emptyset$ für $i \neq k$. Gemäß unserer Annahme enthält U einen 1-Zykel, der nicht null-homolog ist. Dieser ist die Vereinigung von endlich vielen geschlossenen Kurven z_i und jedes z_i besteht aus endlich vielen Simplizes $s_{i1},\dots,s_{ij}$, j abhängig von i. Die s_{ik} haben nach Definition des projizierten Komplexes Lifte s'_{ik} nach PM, also nach U'. Nun unterscheiden sich $s'_{i1}(1)$ und $s'_{i2}(0)$ durch ein $\varphi \in O(2)$. Deshalb ist $\varphi s'_{i2}$ ein

Lift von s_{i2}, den wir wieder mit s'_{i2} bezeichnen wollen, so daß $s'_{i1}(1)$ und $s'_{i2}(0)$ übereinstimmen. Induktiv erhalten wir einen Lift z'_i der Kurve z_i, so daß sich Anfangs- und Endpunkt um ein Element $\Upsilon \in S$ unterscheiden (eine verkehrte Laufrichtung können wir vermeiden, wenn wir U klein genug wählen). Ist nun z'_i auf einem Intervall $[a,b]$ definiert, so homotopieren wir Υ auf $[a,b]$ in 1. Für $t \in [a,b]$ multiplizieren wir $z'_i(t)$ mit $h(t)$, wo h die obige Homotopie bezeichnet. Dadurch wird z'_i eine geschlossene Kurve. Deshalb liegt unser Zykel im Bild von p. Ist U klein genug gewählt, dann kann man jede Kurve z'_i in G' hinein deformieren (etwa, indem wir $z'_i(t)$ mit Hilfe von geodätischen Verbindungsbögen in die Geodätische $g \in G'$ homotopieren, so daß $z'_i(t)(0)$ und $g(0)$ minimalen Abstand haben). Mit p projiziert ergibt dies einen zu unserem Zykel homologen Zykel in G. Damit ist das Lemma bewiesen.

Sei $\varkappa > 0$, X ein kompakter topologischer Raum und $f: X \longrightarrow \Sigma^{\varkappa} M$ eine stetige Abbildung. Wir nehmen an, daß jeder Punkt aus X eine Umgebung U hat, so daß f auf U einen Lift f_U nach $P^{\varkappa} M$ hat, der die Bedingungen erfüllt, die wir im 2. Abschnitt an Abbildungen $f^{\sim}$ gestellt haben, um $D^{\sim}(f^{\sim})$ definieren zu können. Solche Abbildungen f sollen zulässig heißen.

Seien $U_1, \dots, U_n$ und $V_1, \dots, V_n$ Überdeckungen von X, so daß $cl(V_i) \subset U_i$ und so, daß auf U_i Lifte von f in der angegebenen Weise existieren (weil X kompakt und f zulässig ist, existieren solche Überdeckungen). Es gibt dann stetige Funktionen $0 \leq h_i \leq 1$ mit $h_i | V_i = 1$ und $h_i | X - U_i = 0$. Mit Hilfe der h_i und der f_{U_i} können wir wie folgt eine Homotopie von f erklären:

für $x \in U_i$ deformieren wir $f(x)$ in $p(D^{\sim}_{h_i}(f_{U_i}(x)))$
für $x \notin U_i$ bleibt $f(x)$ fest.

Dies führen wir nacheinander für alle i durch. Die neue Abbildung $D'(f)$ ist dann wieder zulässig. Aus (2.3') folgt:

<u>3.2 Satz.</u> Sei $0 < l < \chi$ und $G(l) \subset \Sigma M$ die Menge der

i) doppelpunktfreien geschlossenen Geodätischen der Energie l, falls M orientierbar, bzw. der

ii) doppelpunktfreien oder zweifach durchlaufenen doppelpunktfreien, durch doppelpunktfreie Kurven approximierbaren geschlossenen Geodätischen der Energie l, falls M nicht orientierbar.

Sei U eine Umgebung von $G(l)$ (falls $G(l) = \emptyset$, kann man $U = \emptyset$ wählen). Dann gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $\alpha > 0$, so daß für alle Tupel $(f, h_1, \ldots h_n)$ wie oben mit $\operatorname{im} f \subset \Sigma^{l+\alpha} M$ gilt

$$\operatorname{im} D'(f) \subset U \cup \Sigma^{l-\alpha} M.$$

Sei nun v ein Zykel in X und $F(v)$ die Menge aller Zykel in $\Sigma^{\chi} M$ (im projizierten Komplex), die Bild eines zu v homologen unter einer zu f homotopen, zulässigen Abbildung sind. Wir setzen

$$l(v) = \inf_{u \in F(v)} \max_{c \in u} E(c)$$

Eine direkte Konsequenz von (3.2) ist dann

3.3 Korollar. $l(v) > 0 \implies G(l(v)) \neq \emptyset$.

Natürlich ist die $O(2)$-Aktion auch auf $C(S,M)$ definiert. In $C(S,M)/O(2)$ berechnen wir die Homologie wieder bezüglich des projizierten Komplexes mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$.

3.4 Lemma. Sei u der 1-Zykel in $C(S,S^2)/O(2)$, der aus den Kreisen auf S^2 besteht, die durch einen festen Punkt laufen und eine gegebene Ebene senkrecht schneiden, die diesen Punkt enthält. Dann ist u nicht nullhomolog.

Beweis: Wir zeigen dazu durch Induktion über die Anzahl der Simplizes der Kette w mit $\partial w = v$, daß jeder Lift eines berandenden 1-Zykels v selber ein Rand ist. Daraus folgt dann das Lemma, denn unser Zykel u hat einen Lift, der das erzeugende Element in $H_1(C(S,S^2);\mathbb{Z}_2) = \pi_2(S^2)\otimes\mathbb{Z}_2$ repräsentiert.

Zuerst bestehe w also aus einem Simplex und sei w' ein Lift von w. Dann ist $v' = \partial w'$ ein Lift von v. Sei v'' ein beliebiger Lift von v. Zu zeigen ist, daß v'' ein Rand ist. Dazu zeigen wir, daß v' und v'' homotop sind (mod $\mathbb{Z}_2$). Zunächst machen wir einige Bemerkungen zu Eigenschaften von v' und v'': v' und v'' sind Abbildungen von S in $C(S,S^2)$. Ist $v'(t)$ Punktkurve, dann auch $v''(t)$ und umgekehrt, weil $p\circ v' = p\circ v''$.

*) Man kann o.B.d.A. annehmen, daß es ein $t_0 \in S$ gibt, so daß $v'(t_0)$ Punktkurve ist.

Denn sei $t_0 \in S$ gegeben. Dann gibt es $\varphi \in O(2)$ mit

$v'(t_o) = \varphi v''(t_o)$. Eine Nullhomotopie von v" multipliziert mit φ ergibt dann eine Nullhomotopie von v'. Solche Homotopien simultan ausgeführt ergeben Simplizes v' und v", die homotop sind zu v' und v" und so, daß $p \circ v' = p \circ v''$ und so, daß *) gilt.

Sei $T = \{t \in S \mid v'(t)$ ist Punktkurve$\}$. Wegen *) ist $T \neq \emptyset$. T ist abgeschlossen und S-T daher eine (eventuell abzählbare) disjunkte Vereinigung von Intervallen I_j.

**) Man kann o.B.d.A. annehmen, daß das Komplement von T aus einer endlichen Vereinigung von disjunkten Intervallen $I_1,\dots I_n$ besteht.

Denn v' und v" sind gleichmäßig stetig und daher bestehen $v'(I_j)$ und $v''(I_j)$ für alle bis auf endlich viele j nur aus Kurven sehr kleinen Durchmessers. Für t aus der Vereinigung dieser I_j und T definieren wir eine simultane Homotopie von v' und v", indem wir v'(t) und v"(t) längs geodätischer Verbindungsbögen auf den Anfangspunkt von v'(t) zusammenziehen. Das liefert Simplizes $\tilde{v}'$ und $\tilde{v}''$, die homotop sind zu v' und v", so daß $p \circ \tilde{v}' = p \circ \tilde{v}''$ und so, daß **) gilt.

Für $t \in I_1 \cup \dots \cup I_n$ sei n(t) definiert durch
$n(t) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid v'(t)(s + 1/n) = v'(t)(s)$ für alle $s \in S\}$.
n(t) zählt, wie oft v'(t) die zugrunde liegende einfache Kurve durchläuft, cf. [Kl]. Weil v'(t) keine Punktkurve ist, ist n(t) oberhalb stetig $(t_k \to t \Rightarrow \lim n(t_k) \leq n(t))$ und daher auf kompakten Teilmengen von $I_1 \cup \dots \cup I_n$ nach oben beschränkt.

***) Man kann o.B.d.A. annehmen, daß es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$n(t) \leq N$ für alle $t \in I_1 \cup \ldots \cup I_n$.

Denn nach dem eben gesagten ist $n(t)$ außerhalb kleiner offener Umgebungen des Randes der jeweiligen I_j nach oben beschränkt. Wir wählen diese Umgebungen so klein, daß $v'(t)$ und $v''(t)$ sehr kleinen Durchmesser hat für t aus einer dieser Umgebungen. Wir können dann wie oben $v'(t)$ und $v''(t)$ auf den Anfangspunkt von $v'(t)$ zusammenziehen. Dabei bleibt $n(t)$ konstant für die t, für die $v'(t)$ und $v''(t)$ keine Punktkurve wird, daher gilt ***).

Für die folgenden Überlegungen nehmen wir also an, daß *), **), ***) gelten. v' und v'' korrespondieren durch $f'(t,s) = v'(t)(s)$ und $f''(t,s) = v''(t)(s)$ mit Abbildungen $f', f'' : T^2 = S \times S \longrightarrow S^2$. Auf dem Rande eines I_j liefern v' und v'' Punktkurven, also faktorisieren $f'|I_j$ und $f''|I_j$ über Abbildungen $g_j', g_j'' : \bar{I}_j \times S/\partial \bar{I}_j \times S = S^2 \longrightarrow S^2$. Für alle $t \in I_j$ unterscheiden sich nun $v'(t)$ und $v''(t)$ um ein $\varphi(t)$ aus $O(2)$. Ist $\varphi(t_j) \in S \subset O(2)$ für $t_j \in I_j$, dann ist $\varphi(t)$ aus S für alle $t \in I_j$. Weil $v'(t)$ keine Punktkurve ist für $t \in I_j$, definiert φ eine stetige Abbildung $\varphi : I_j \longrightarrow S/\mathbb{Z}_{N!}$, wo N in ***) definiert wurde. I_j ist kontraktibel, also kann man φ liften zu einer stetigen Abbildung $\psi : I_j \longrightarrow S$. Eine Homotopie von ψ zur konstanten Abbildung $t \longmapsto 1$ definiert eine Homotopie von g_j' zu g_j'' bzw. von $v'|I_j$ zu $v''|I_j$. Ist also g_j' homotop zu $k \cdot id$, dann auch g_j''. Ist nun umgekehrt $\varphi(t) \in O(2) - S$, dannsieht man: ist g_j' homotop $k \cdot id$, dann g_j'' zu $(-k) \cdot id$. Mod $\mathbb{Z}_2$ sind also f' und f'' und damit v'uund v'' homotop, womit der Induktionsanfang bewiesen ist. Der Induktiosschritt geht analog.

4. Beweis des Satzes von Lusternik und Schnirelmann:
Wir betrachten zuerst die Teilmenge $\Gamma(S^2)$ der Kreise in $\dot{\Sigma}(S^2)$ (ein Kreis ist der nichtleere Durchschnitt einer affinen Ebene mit S^2). In $\Gamma(S^2)$ ist die Menge der Großkreise $\Delta(S^2)$ enthalten (ein Großkreis ist der Durchschnitt einer Ebene durch den Ursprung mit S^2). Einem Kreis kann man den eindeutig bestimmten dazu parallelen Großkreis zuordnen. Das definiert eine stetige Abbildung $\pi:\Gamma(S^2) \to \Delta(S^2)$. Identifiziert man einen Großkreis mit der zu ihm senkrechten Geraden durch den Ursprung, (dies ist ein Homöomorphismus von $\Delta(S^2)$ mit $P^2\mathbb{R}$), so entspricht π genau dem Scheibenbündel des kanonischen Bündels über $P^2\mathbb{R}$. Mit Hilfe des Thom-Isomorphismus können wir also schließen, daß $H_i(\Gamma(S^2),\Gamma^o(S^2)) = \mathbb{Z}_2$ ist für $i = 1,2,3$, wo $\Gamma^o(S^2)$ die Punktkreise bezeichnet (Kreise der Länge 0). Wir betrachten natürlich auch in diesem Falle nur Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$. Nach Konstruktion des Thom-Isomorphismus wird die 1 in $H_1(\Gamma(S^2),\Gamma^o(S^2))$ durch einen Zykel repräsentiert, der aus allen zu einem festen Großkreis parallelen Kreisen besteht. Bezeichnen wir die drei nichttrivialen Homologieklassen mit v_1, v_2, v_3, so gilt für die Orientierungsklasse U des Bündels π:
$U \cap v_3 = v_2$, $U \cap v_2 = v_1$. Hier bezeichnet $\cap$ das cap-Produkt, das mit Hilfe der Alexander-Whitney Diagonalapproximation definiert wird. Sei $i:(\Gamma(S^2),\Gamma^o(S^2)) \to (\Sigma S^2, \Sigma^o S^2)$ und $i_* v_i = w_i$. Nach entsprechender Unterteilung der Simplizes kann man annehmen, ~~daß das~~ Bild unter i im Projizierten Komplex liegt. Aus (3.4) folgt

*) $w_1 \neq 0$. Sei Z der zu w_1 duale Kozykel.

Dann gilt $1 = Z(i_*v_1) = i^*(Z)(v_1)$, also $i^*(Z) = U$. Deshalb gilt $**)$ $Z \cap w_3 = w_2$ und $Z \cap w_2 = w_1$:

Damit haben wir drei nichttriviale Homologieklassen in $\Sigma^\varkappa S^2$ konstruiert ($\varkappa$ sei so, daß $E(c) \leqslant \varkappa/2$ für alle Kreise c). i ist zulässig und wegen $**)$ gilt, daß jedes Element aus $F(v_{i+1})$ im mengentheoretischen Sinne ein Element aus $F(v_i)$ enthält. Also ist $l(v_3) \geqslant l(v_2) \geqslant l(v_1)$. Aus $*)$ folgt aber $l(v_1) > 0$. Ist daher $l(v_3) > l(v_2) > l(v_1)$, dann haben wir drei verschiedene Energieniveaus gefunden, auf denen es doppelpunktfreie geschlossene Geodätische gibt.

Es bleibt, die Gleichheit zu diskutieren. Sei also $l(v_3) = l(v_2)$ bzw. $l(v_2) = l(v_1)$. Wir werden dann sehen, daß es unendlich viele geschlossene, doppelpunktfreie Geodätische der Energie $l = l(v_3)$ bzw. $l = l(v_2)$ gibt. Nach (3.1) genügt es zu zeigen, daß jede Umgebung der Menge $G = G(l(v_3))$ bzw. $G = G(l(v_2))$ einen 1-Zykel enthält, der nicht nullhomolog ist. Wir nehmen, um zum Widerspruch zu kommen, an, daß es eine Umgebung U von G gebe, so daß kein 1-Zykel w in U existiert mit $Z(\{w\}) = 0$. Aus den exakten Sequenzen des Tripels $(\Sigma^\varkappa S^2, \Sigma^0 S^2 \cup U, \Sigma^0 S^2)$ in Homologie und Kohomologie, die dual sind wegen der Koeffizienten, folgt die Existenz eines Kozykels $Z' \in Z$ mit $Z'(s) = 0$ für jedes 1-Simplex s in U. Weil G kompakt ist, enthält U eine Umgebung U' von G mit $cl(U') \subset U$. Zu U' gibt es $\alpha > 0$, so daß für jedes $u \in F(v_3)$ bzw. $u \in F(v_2)$, das enthalten ist in $\Sigma^{l+\alpha} S^2$ gilt $D'(u) \subset U' \cup \Sigma^{l-\alpha} S^2$.

Wir unterteilen D'(u) so, daß die Unterteilung feiner ist als $\{U, \Sigma^{1-\alpha}S^2_\cdot - U'\}$. Wir erhalten einen Zykel $u' \in F(v_2)$ bzw. $u' \in F(v_2)$ mit $Z' \cap u' \subset \Sigma^{1-\alpha}S^2$. Nun ist aber $Z' \cap u'$ Element von $F(v_2)$ bzw. $F(v_1)$. Also $l(v_2) < l$ bzw. $l(v_1) < l$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist der Beweis des Satzes fertig.

Literaturverzeichnis:

[Al] S.I.Alber, On periodicity problems in the calculus of variations in the large. Uspehi Mat. Nauk 12 (1957), No. 4; Americ. Math. Soc. Transl. (2) 14 (1960)

[FL] A.I.Fet und L.Lusternik, Variational problems on closed manifolds. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 81 (1951)

[Kl] W.Klingenberg, Lectures on closed geodesics. 3rd ed. Math. Inst. Universität Bonn, Bonn 1977

[Lu] L.Lusternik, The topology of the calculus of variations in the large. Trudy. Mat. Inst. Steklov 19 (1947); Transl. of Math Monographs Vol 16 (1966), AMS, Providence, R.I.

[LS] L.Lusternik et L.Schnirelmann, Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0. C.R.Acad. Sci. Paris 189 (1929)

[Th] G.Thorbergsson, Geschlossene Geodätische auf nichtkompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dissertation, Math. Inst. Universität Bonn, Bonn 19[illegible]