SUR LA CONJECTURE DE SAITO-KUROKAWA (D'APRES H. MAASS)

D. ZAGIER

Il existe une correspondance bijective entre les formes modulaires à une variable et certaines formes modulaires pour le groupe modulaire de Siegel de degré 2. Ce fait a été conjecturé indépendamment en 1977 par H. Saito et N. Kurokawa à partir de calculs numériques explicites pour les coefficients de Fourier des formes de basse dimension. Dans l'article [8], Kurokawa décrit l'espace des formes modulaires de Siegel que l'on doit obtenir de cette façon et donne quelques exemples. Il fait la remarque que ces formes ne satisfont pas à la conjecture de Ramanujan généralisée. Dans une série de trois articles [12-14] parus dans les Inventiones Mathematicae en 1979 et complétés par un article d'Andrianov [2], Maass démontre l'existence de cette correspondance dans le sens contraire, sans toutefois en pouvoir démontrer la bijectivité. Notre but est d'expliquer sous une forme simplifiée les résultats de Maass-Andrianov et en même temps de démontrer complètement la conjecture de Saito-Kurokawa. On ramène celle-ci à des questions sur la relation entre formes modulaires de poids demi-entier et formes de poids entier qui avaient été résolues antérieurement par les travaux de Shimura [21], Niwa [15] et, dans la forme précise dont on aura besoin, par Kohnen [6]. On signale que la conjecture a été étudiée du même point de vue par Eichler, qui obtient également des résultats dans le cas (non traité ici) des formes de niveau > 1.

§1. Rappels sur les formes modulaires ordinaires et de Siegel. Conjecture de Saito-Kurokawa.

Pour fixer les notations, on rappelle très brièvement les propriétés les plus importantes des formes modulaires en une variable. Pour k un entier positif et pair on note M_k l'espace des formes modulaires sur $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire des fonctions $f:H \to \mathbb{C}$ (H demi-plan supérieur complexe) satisfaisant à

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + b}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau) \qquad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ \tau \in H\right) \tag{1}$$

et ayant un développement de Fourier

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \qquad (q = e^{2\pi i \tau}), \tag{2}$$

et par S_k le sous-espace des formes paraboliques $(a(0) = 0)$. On associe à $f \in S_k$ la série de Dirichlet $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$. Pour tout premier p on a l'opérateur de Hecke $T(p): S_k \to S_k$; l'espace S_k a une base canonique donnée par les formes propres simultanées de ces opérateurs et la série L d'une telle forme a une décomposition en produit eulérien du type

$$L_f(s) = \prod_p (1 - \lambda_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} \qquad (T(p) f = \lambda_p f). \tag{3}$$

D'après la conjecture de Ramanujan-Petersson, démontrée par Deligne, le polynôme $1 - \lambda_p t + p^{k-1} t^2$ apparaissant en (3) a des racines conjuguées complexes, c'est-à-dire

$$\lambda_p^2 < 4\, p^{k-1} \qquad (\forall\ p). \tag{4}$$

La définition des formes modulaires de Siegel (de degré 2) est analogue, sauf que l'on remplace Γ par $\Gamma_2 = Sp_4(\mathbb{Z})$ et $\tau \in H$ par une variable Z dans le demi-plan supérieur de Siegel H_2, c'est-à-dire

$$Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix},\ \tau, \tau' \in H, z \in \mathbb{C}, \qquad \operatorname{Im}(z)^2 < \operatorname{Im}(\tau) \operatorname{Im}(\tau'). \tag{5}$$

L'espace $M_k(\Gamma_2)$ des formes modulaires de poids k pour Γ_2 est formé des fonctions $F: H_2 \to \mathbb{C}$ satisfaisant à la loi de transformation

$$F(AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \det(CZ+D)^k F(Z) \tag{6}$$

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_2,\ A,B,C,D \in M_2(\mathbb{Z})\right)$$

et ayant un développement de Fourier de la forme

$$F(Z) = \sum_{Q\geq 0} A(Q) e^{2\pi i Q\cdot Z} \tag{7}$$

$$= \sum_{n,r,m} A(n,r,m)\, e^{2\pi i(n\tau+rz+m\tau')},$$

où la sommation porte sur les formes quadratiques binaires semi-définies positives

$$Q = [n,r,m] = nx^2+rxy+my^2 \tag{8}$$

$$(n,r,m\in\mathbb{Z},\quad n,m\geqslant 0,\quad 4nm - r^2\geqslant 0)$$

(on a préféré ici le langage des formes quadratiques à la notation matricielle $\begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{pmatrix}$ habituelle). Le sous-espace $S_k(\Gamma_2)$ des formes paraboliques est défini de la même façon mais avec $Q > 0$ (c'est-à-dire $4nm > r^2$). La théorie des opérateurs de Hecke, bien plus difficile dans ce cas que dans celui des formes sur $SL_2(\mathbb{Z})$, a été développée par Andrianov [1], qui montre comment associer à une forme F propre pour ces opérateurs une série de Dirichlet de la forme

$$Z_F(s) = \prod_p Z_{F,p}(p^{-s})^{-1}, \tag{9}$$

où $Z_{F,p}(t)$ est un polynôme de degré 4 dont les coefficients dépendent des valeurs propres de F pour $T(p)$ et $T(p^2)$ (nous n'allons pas préciser). Ce qu'ont découvert Saito et Kurokawa est que, pour certaines formes F et pour des petites valeurs de p, ce polynôme a la forme

$$Z_{F,p}(t) = (1 - p^{k-1}t)(1 - p^{k-2}t)\left(1 - \lambda_p t + p^{2k-3}t^2\right) \tag{10}$$

où λ_p est la valeur propre de $T(p)$ pour une certaine forme propre $f \in S_{2k-2}$ qui dépende de F mais non de p; ceci mène à la

CONJECTURE DE SAITO-KUROKAWA (version faible): Il y a une correspondance $f \leftrightarrow F$ entre S_{2k-2} et un certain sous-espace de $S_k(\Gamma_2)$, caractérisée par l'identité

$$Z_F(s) = \zeta(s-k+1)\zeta(s-k+2)L_f(s) \tag{11}$$

des séries de Dirichlet associées.

Comme on l'a déjà mentionné, l'équation (11) (ou même (10) pour une valeur de p) implique que la forme F en question ne satisfait pas à la conjecture de Ramanujan-Petersson généralisée qui voudrait que les racines du polynôme $Z_{F,p}(t)$ soient toujours de valeur absolue $p^{-k+3/2}$. Par contre, Kurokawa conjecture que toute forme propre $F \in S_k(\Gamma_2)$ ne provenant pas d'une forme de S_{2k-2} satisfait à cette hypothèse. Les dimensions de $S_k(\Gamma_2)$ et S_{2k-2} pour k petit sont données par la table

k	<10	10	12	14	16	18	20
dim S_{2k-2}	0	1	1	1	2	2	2
dim $S_k(\Gamma_2)$	0	1	1	1	2	2	3

,

et pour la forme propre en $S_{20}(\Gamma_2)$ qui n'est pas associée à un élément de S_{38} Kurokawa a vérifié pour p = 2, 3 que $Z_{F,p}(t) = (1 - \alpha_p t + p^{37}t^2)(1 - \beta_p t + p^{37}t^2)$ avec $|\alpha_p|$, $|\beta_p| < 2\, p^{37/2}$.

§2. L'espace de Maass. Formes de poids demi-entier. Énoncés des théorèmes.

L'investigation de Maass est basée sur l'étude d'un certain sous-espace de $M_k(\Gamma_2)$ qu'il appelle le "Spezialschar" et que nous allons appeler l'espace de Maass. C'est l'espace des formes (7) dont les coefficients de Fourier satisfont aux identités

$$A(n,r,m) = \sum_{\substack{d>0 \\ d|(n,r,m)}} d^{k-1} A(1,\tfrac{r}{d},\tfrac{mn}{d^2}) \qquad (12)$$

$$((n,r,m) \neq (0,0,0)).$$

On note cet espace (resp. son intersection avec $S_k(\Gamma_2)$) par $M_k^*(\Gamma_2)$ (resp. $S_k^*(\Gamma_2)$). Alors la conjecture précise faite par Kurokawa dans [8] est

CONJECTURE DE SAITO-KUROKAWA (version forte): L'espace $S_k^*(\Gamma_2)$ est engendré par des formes propres pour les opérateurs de Hecke. Il y a une correspondance bijective entre ces formes et les formes propres de S_{2k-2} donnée par la relation (11) entre les séries L.

La définition un peu étrange de l'espace de Maass a été faite pour des raisons empiriques: il a été découvert par Saldaña [20] que les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein pour Γ_2 satisfont à (12) (ce qui fut démontré ensuite par Maass [9]) et par Resnikoff et Saldaña [19] que les mêmes relations sont satisfaites par les coefficients de certaines formes de Siegel paraboliques; ces calculs ont mené Maass en [11] et puis de façon plus systématique en [12-14] à considérer l'espace défini par (12). Nous allons donner une définition plus naturelle de l'espace de Maass. Si $Q = [n,r,m]$ est une forme quadratique binaire définie, on note par $d(Q) = 4nm-r^2$ la valeur absolue de son discriminant et par $e(Q) = (n,r,m)$ le p.g.c.d. de ses coefficients, de façon que Q est e(Q) fois une forme primitive (donc avec $e = 1$) de discriminant $-d(Q)/e(Q)^2$. Alors on a le

Théorème 1: Soit F une forme modulaire de Siegel de degré 2 et de poids k avec le développement de Fourier (7). Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) F appartient à l'espace de Maass, c'est-à-dire les coefficients A(Q) satisfont aux relations (12);

ii) les coefficients A(Q) ne dépendent que de d(Q) et de e(Q);

iii) les coefficients A(Q) pour Q primitive ne dépendent que de d(Q).

Avant d'énoncer le deuxième théorème, il nous faudra rappeler des résultats sur les formes modulaires de poids demi-entier. Une forme modulaire de poids $k - 1/2$ ($k \in \mathbb{N}$) sur le groupe $\Gamma_0(4) = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod 4 \}$ est une fonction $h: H \to \mathbb{C}$ holomorphe et satisfaisant aux conditions de croissance usuelles aux pointes telle que

$$h\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varepsilon_k\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(c\tau+d)^{k-1/2} h(\tau) \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4) \tag{13}$$

où $\varepsilon_k\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est une certaine racine 8-ième d'unité, définie par exemple par le fait que la série thêta $\left(\sum_{\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 \tau}\right)^{2k-1}$ doit satisfaire à (13). La théorie des telles formes a été initiée par Shimura [21], qui a défini des opérateurs de Hecke et montré comment associer à une forme de poids $k - 1/2$ sur $\Gamma_0(4)$ (ou $\Gamma_0(4N)$, $N \in \mathbb{N}$ propre pour ces opérateurs une forme propre de poids $2k-2$ ayant pour presque tout premier p les mêmes valeurs propres; il conjecturait que le niveau des formes de poids entier obtenues ainsi est 2N, ce qui fut démontré après par Niwa [15]. Cette correspondance $M_{k-1/2} \to M_{2k-2}$ n'est pourtant pas parfaite, car même dans le cas $N = 1$ il existe des formes propres non proportionnelles de poids $k - 1/2$ ayant les mêmes valeurs propres pour presque tous les opérateurs de Hecke. Récemment, Kohnen [6] a pu remédier à ce défaut en introduisant un certain sous-espace de $M_{k-1/2}$, défini pour $N = 1$ et k pair comme l'ensemble des formes h satisfaisant à (13) et ayant un développement de Fourier de la forme

$$h(\tau) = \sum_{\substack{n\geqslant 0 \\ n\equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod 4}} c(n)\ e^{2\pi i n\tau} \tag{14}$$

On note par $M^+_{k-1/2}$ cet espace et par $S^+_{k-1/2}$ le sous-espace des formes paraboliques $(c(0) = 0)$. Alors on a le

<u>Théorème</u> (Kohnen [6]): <u>Soit</u> $k > 0$ <u>un entier pair</u>. <u>L'espace</u> $M^+_{k-1/2}$ <u>est stable par les opérateurs de Hecke définis par</u>

$$T(p)h(\tau) = \sum_{\substack{n\geqslant 0 \\ n\equiv 0 \text{ ou } 3 \pmod 4}} \left\{c(p^2n) + \left(\frac{-n}{p}\right)p^{k-2}c(n) + p^{2k-3}c(n/p^2)\right\} e^{2\pi i n\tau} \tag{15}$$

<u>et possède une base</u> (<u>unique à des permutations et des multiplications par des scalaires près</u>) <u>de formes propres pour ces opérateurs</u>. <u>Il y a une bijection canonique entre ces formes propres et les formes propres dans</u> M_{2k-2} <u>telle que les valeurs propres des formes correspondantes sont les mêmes</u>. <u>Pour l'obtenir</u>, <u>on pose pour</u> $h = \sum c(n)\ q^n \in M^+_{k-1/2}$ <u>et</u> D <u>le discriminant d'un corps quadratique imaginaire</u>

$$S^+_D h(\tau) = \tfrac{1}{2}c(0)L_D(2-k) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{d\mid n \\ d>0}} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-2} c\left(\frac{n^2}{d^2}|D|\right)\right) e^{2\pi i n\tau} \tag{16}$$

(où $L_D(s) = \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})}(s)/\zeta(s) = \sum(\frac{D}{n})n^{-s}$); alors $S_D^+ h \in M_{2k-2}$, l'application S_D^+ commute aux opérateurs de Hecke, et il y a une combinaison linéaire des S_D^+ qui est un isomorphisme.

Kohnen démontre ce résultat également dans le cas de k impair, où il faut remplacer "$n \equiv 0$ ou 3" par "$n \equiv 0$ ou 1", $(\frac{-n}{p})$ par $(\frac{n}{p})$, et D par 1 ou le discriminant d'un corps quadratique réel, mais nous n'aurons besoin que du cas cité ici. Nous pouvons maintenant formuler le résultat principal de cette note.

Théorème 2: Il y a un isomorphisme canonique, commutant aux opérateurs de Hecke, et faisant correspondre des formes paraboliques à des formes paraboliques, entre l'espace $M_k^*(\Gamma_2)$ de Maass et l'espace $M_{k-1/2}^+$ de Kohnen, donné comme il suit: Si $F \in M_k^*(\Gamma_2)$ a le développement de Fourier (7), on pose $c(o) = \frac{2}{\zeta(1-k)}A(0)$ pour tout n positif et congru 0 ou 3 (mod 4), et $c(n) = A(Q_n)$, où Q_n est une forme binaire primitive quelconque de discriminant $-n$. Alors la fonction h définie par (14) appartient à $M_{k-1/2}^+$ inversément, pour $h \in M_{k-1/2}^+$ avec le développement de Fourier (14), la fonction définie par (7) avec

$$A(Q) = \sum_{\substack{d \mid e(Q) \\ d>0}} d^{k-1} c\left(d(Q)/d^2\right) \qquad (Q \neq 0) \tag{17}$$

et $A(0) = \frac{1}{2}\zeta(1-k)\ c(0)$ appartient à $M_k^*(\Gamma_2)$.

Corollaire: La "version forte" de la conjecture de Saito-Kurokawa est vraie.

La plus grande partie de ce théorème est contenue dans les travaux de Maass-Andrianov, dont nous rappelons brièvement le contenu pour faciliter la comparaison avec notre résultat. L'idée essentielle d'associer à une forme de $M_k^*(\Gamma_2)$ une forme de poids demi-entier est déjà contenue dans le premier papier de Maass [12], où il l'emploie pour démontrer que la dimension de $M_k^*(\Gamma_2)$ est au plus égale à celle de

M_{2k-2}. Dans le deuxième papier [13] il montre l'égalité de ces dimensions par le moyen de l'application inverse (demi-entier → Siegel). Dans le troisième [14] il étudie la fonction zêta d'une forme propre de $S_k^*(\Gamma_2)$ et montre qu'elle a la forme (11) pour une certaine forme propre $f \in S_{2k-2}$. Pour ceci il a besoin d'une certaine hypothèse sur les coefficients de Fourier; cette hypothèse a été éliminée par Andrianov [2], qui a démontré en même temps l'invariance de l'espace de Maass par les opérateurs de Hecke. Les deux auteurs ont utilisé les résultats de Shimura. Les améliorations données ici consistent en ce que l'espace $M_{k-1/2}^+$ est plus naturel et a une définition plus simple que l'espace des formes de poids demi-entier dans lequel Maass envoie son espace (ce qui permet de simplifier les démonstrations de [12] et [13]) et que l'on dispose des résultats, plus précis que ceux de Shimura, de Kohnen (ce qui permet d'éviter entièrement les arguments donnés en [14] et [2]).

Signalons aussi l'article très récent [4] de Evdokimov, où l'auteur redémontre l'invariance de l'espace de Maass par les opérateurs de Hecke et démontre pour une forme propre $F \in S_k(\Gamma_2)$ l'équivalence des trois énoncés suivants:

i) $F\ S_k^*(\Gamma_2)$

ii) $Z_F(s)$ est donnée par (11) pour une forme propre $f \in S_{2k-2}$;

iii) $Z_F(s)$ a un pôle simple en $s = k$ (d'après Andrianov [1], c'est le seul pôle possible pour la fonction zêta d'une forme en $S_k(\Gamma_2)$). L'implication i)→ii) est le résultat de Maass-Andrianov et l'implication ii)→iii) est triviale; les implications contraires donnent une autre caractérisation de l'espace de Maass que celle du Théorème 1.

La démonstration du Théorème 2 sera donnée au §3; on montre ici comment en déduire le corollaire. D'après le

Théorème 2.4.1 d'Andrianov [1], la relation entre la fonction zêta d'une forme propre $F \in S_k(\Gamma_2)$ et ses coefficients de Fourier est donnée par la formule

$$\left(\sum_{i=1}^{h(D)} A(Q_i)\right) Z_F(s) = \zeta_K(s-k+2) \sum_{i=1}^{h(D)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A(mQ_i)}{m^s}, \tag{18}$$

où D est le discriminant de n'importe quel corps quadratique K et Q_i $(i=1,\ldots,h(D))$ des représentants pour les classes d'équivalence des formes binaires quadratiques définies positives de discriminant D. Si l'on suppose F dans l'espace de Maass, alors les coefficients de Fourier $A(Q_i)$ et $A(mQ_i)$ sont indépendants de i et donnés d'après le Théorème 2 par

$$A(Q_i) = c(|D|), \; A(mQ_i) = \sum_{d|m} d^{k-1} \, c(\tfrac{m^2}{d^2}|D|),$$

où les c(n) sont les coefficients de la forme propre $h \in S^+_{k-1/2}$ qui correspond à F. En divisant les deux membres de (18) par h(D) on obtient donc

$$c(|D|) \; Z_F(s) = \zeta(s-k+2) L_D(s-k+2) \zeta(s-k+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n^2|D|)}{n^s} .$$

D'autre part, d'après le théorème de Kohnen, la forme $S^+_D h$ définie par (16) est multiple scalaire de la forme propre normalisée $f \in S_{2k-2}$ ayant les mêmes valeurs propres que h. L'équation (16) entraîne alors $S^+_D h = c(|D|)f$ et

$$c(|D|) L_f(s) = L_D(s-k+2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n^2|D|)}{n^s} .$$

En comparant les deux dernières équations et en choisissant D tel que $c(|D|) \neq 0$ (ce qui est toujours possible, car $h \not\equiv 0$) on retrouve la relation (11) de Saito-Kurokawa; la correspondance

$$S_k^*(\Gamma_2) \xleftrightarrow[\text{Théorème 2}]{\sim} S_{k-1/2}^+ \xleftrightarrow[\text{Théorème de Kohnen}]{\sim} S_{2k-2}$$

est donc bien la même que celle de leur conjecture.

§3. Développement de Fourier-Jacobi. Démonstrations des théorèmes.

Nous commençons par construire une application $M_k(\Gamma_2) \to M_{k-1/2}^+$ dont la restriction à l'espace de Maass sera l'isomorphisme du Théorème 2.

Théorème 3: Soit $F\in M_k(\Gamma_2)$ avec le développement de Fourier (7). On pose

$$c_0(n) = A(n,0,1), \quad c_1(n) = A(n,1,1).$$

Alors la fonction $h(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_0(n)q^{4n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_1(n)q^{4n-1}$ appartient à $M_{k-1/2}^+$.

Démonstration: La fonction $F(Z) = F(\tau,z,\tau')$ satisfait aux équations de transformation

$$F(\tau,z,\tau') = (c\tau+d)^{-k}F\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}, \tau'-\frac{cz^2}{c\tau+d}\right) \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma\right) \tag{19a}$$

$$F(\tau,z,\tau') = F(\tau,z+s\tau,\tau'+2sz+s^2\tau) \quad (s\in\mathbb{Z}), \tag{19b}$$

comme on le voit en appliquant (6) aux éléments

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & & b & \\ & 1 & & 0 \\ \hline c & & d & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ s & 1 & & \\ \hline & & 1 & -s \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

de Γ_2. Soit

$$F(\tau,z,\tau') = \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(\tau,z)e^{2\pi i m\tau'} \tag{20}$$

le développement de Fourier de F par rapport à la variable τ'; alors les équations (19) deviennent

$$\phi_m\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k \, e^{\frac{2\pi imcz^2}{c\tau+d}} \, \phi_m(\tau,z), \qquad (21a)$$

$$\phi_m(\tau,z+s\tau) = e^{-2\pi im(2sz+s^2\tau)}\,\phi_m(\tau,z). \qquad (21b)$$

D'après (7), la fonction ϕ_m a un développement de Fourier de la forme

$$\phi_m(\tau,z) = \sum_{\substack{n,r\in Z\\ 4nm\geq r^2}} A(n,r,m)q^n\zeta^r \qquad (22)$$

$$(q = e^{2\pi i\tau},\ \zeta = e^{2\pi iz}).$$

Nous appelons une fonction ϕ_m sur $H \times \mathbb{C}$ satisfaisant à (21) et (22) une forme de Jacobi (de poids k et indice m) et (20) le développement de Fourier-Jacobi de la forme modulaire de Siegel F.

On considère maintenant le premier coefficient ϕ_1. L'équation (21) entraîne $A(n,r,1) = A(n-rs+s^2,r-2s,1)$, donc avec $s - [\frac{r}{2}]$

$$A(n,r,1) = \begin{cases} c_0(n - \frac{r^2}{4}) & \text{si } r \equiv 0 \pmod 2, \\ c_1(n - \frac{r^2-1}{4}) & \text{si } r \equiv 1 \pmod 2. \end{cases} \qquad (23)$$

Ceci implique

$$\phi_1(\tau,z) = h_0(\tau)\Theta_0(\tau,z) + h_1(\tau)\Theta_1(\tau,z) \qquad (24)$$

où

$$h_0(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_0(n)\, q^n, \quad h_1(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_1(n) q^{n-1/4}$$

et

$$\Theta_i(\tau,z) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r\equiv i \pmod 2}} q^{r^2/4}\, \zeta^r$$

L'équation (21a) appliquée à $\binom{a\ b}{c\ d} = \binom{0\ -1}{1\ \ 0}$ nous donne alors

$$h_0(\tfrac{-1}{\tau})\Theta_0(\tfrac{-1}{\tau},\tfrac{z}{\tau}) + h_1(\tfrac{-1}{\tau})\Theta_1(\tfrac{-1}{\tau},\tfrac{z}{\tau})$$
$$= \tau^k e^{\frac{2\pi i z^2}{\tau}}\Big(h_0(\tau)\Theta_0(\tau,z) + h_1(\tau)\Theta_1(\tau,z)\Big);$$

d'autre part, on obtient aisément à l'aide de la formule de sommation de Poisson les identités

$$\Theta_0(\tfrac{-1}{\tau},\tfrac{z}{\tau}) = \sqrt{\tfrac{\tau}{2i}}\; e^{2\pi i z^2/\tau}\Big(\Theta_0(\tau,z) + \Theta_1(\tau,z)\Big),$$

$$\Theta_1(\tfrac{-1}{\tau},\tfrac{z}{\tau}) = \sqrt{\tfrac{\tau}{2i}}\; e^{2\pi i z^2/\tau}\Big(\Theta_0(\tau,z) - \Theta_1(\tau,z)\Big).$$

Les fonctions Θ_0 et Θ_1 étant linéairement indépendantes (l'une est une fonction paire, l'autre une fonction impaire de ζ), ceci implique

$$\begin{aligned} h_0(-1/\tau) &= \frac{1+i}{2}\,\tau^{k-1/2}\Big(h_0(\tau) + h_1(\tau)\Big), \\ h_1(-1/\tau) &= \frac{1+i}{2}\,\tau^{k-1/2}\Big(h_0(\tau) - h_1(\tau)\Big). \end{aligned} \tag{25}$$

D'autre part on a évidemment $h_0(\tau+1) = h_0(\tau)$, $h_1(\tau+1) = -i\, h_1(\tau)$. On en déduit pour la fonction $h\ (\tau) = h_0(4\tau) + h_1(4\tau)$:

$$h(\tau+1) = h(\tau),$$

$$h(\frac{\tau}{4\tau+1}) = h_0(\frac{-1}{4\tau+1}) - i\, h_1(\frac{-1}{4\tau+1})$$

$$= \frac{1+i}{2}(4\tau+1)^{k-1/2}\Big((1-i)h_0(4\tau+1)+(1\tau+i)h_1(4\tau+1)\Big)$$

$$= (4\tau+1)^{k-1/2}h(\tau)$$

Le groupe (libre) $\Gamma_0(4)$ étant engendré par les matrices $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$, il en suit que la fonction h est une forme modulaire de poids k-1/2 par rapport à ce groupe; elle a en plus un développement de Fourier de la forme (14) avec

$$c(n) = \begin{cases} c_0(n/4) & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ c_1((n+1)/4) & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \qquad (26)$$

donc $h \in M^+_{k-1/2}$. Le théorème 3 est démontré.

Avec c(n) donné par (26), l'identité (23) devient simplement $A(n,r,1) = c(4n-r^2)$; elle exprime le fait que le coefficient A(Q) en (7) pour une forme Q qui représente 1 ne dépend que du discriminant de Q, ce qui est d'ailleurs clair puisque deux telles formes du même discriminant sont toujours équivalentes. Pour la même raison on a $A(1,r,m) = c(4m-r^2)$. Pour F dans l'espace de Maass les équations (12) deviennent donc

$$A(n,r,m) = \sum_{d|(n,r,m)} d^{k-1} c(\frac{4nm-r^2}{d^2}) \qquad (27)$$

ce qui est équivalent à (17). Ceci montre que l'application de $M_k^*(\Gamma_2)$ en $M^+_{k-1/2}$ donnée par le Théorème 3 est bien celle du Théorème 2. L'injectivité de cette application est claire, car (27) définit tous les coefficients de F à partir de ceux de h. Pour démontrer la surjectivité, il faut montrer que pour $\sum c(n)q^n \in M^+_{k-1/2}$ la fonction F définie par (27) et (7) est une forme modulaire de Siegel (qu'elle appartient à l'espace de Maass est alors évident). On se contentera d'en esquisser la démonstration, que l'on peut trouver dans Maass [13].

Soit donc $h \in M^+_{k-\frac{1}{2}}$ comme en (14) et F la fonction donnée par (27) et (7). Il suffit de démontrer que F satisfait à l'équation (19a). En effet, l'égalité de A(n,r,m) et A(m,r,n) entraîne alors que F satisfait à la même équation avec les rôles de τ et τ' échangés, et la forme du développement de Fourier implique que F est périodique de période 1 par rapport à toutes les trois variables et satisfait à (19b); les transformations correspondantes engendrent le groupe de Siegel. Nous devons donc vérifier que les fonctions ϕ_m définies par (20) (ou (22)) satisfont à l'équation (21a). Cela se fait pour m=1 en faisant les mêmes calculs que dans la démonstration du Théorème 3 mais dans le sens contraire: on vérifie que les fonctions $h_0(\tau) = \sum c(4n)q^n$ et $h_1(\tau) = \sum c(4n-1)q^{n-1/4}$ satisfont a (25) et par conséquence que la fonction ϕ_1 donnée par (24) satisfait à (21a) pour $\binom{a\ b}{c\ d} = \binom{0\ -1}{1\ \ 0}$, donc pour tout $\binom{a\ b}{c\ d} \in \Gamma$. En écrivant les développements de Fourier de ϕ_1 et ϕ_m on s'aperçoit que la fonction $\phi_m(\tau,0)$ est l'image de la fonction $\phi_1(\tau,0) \in M_k$ par l'opérateur de Hecke T_m ordinaire. Il est donc naturel d'essayer de définir un opérateur de Hecke pour les formes de Jacobi et de l'utiliser pour déduire des propriétés connues de ϕ_1 celles de ϕ_m. En effet, cela est possible: si l'on pose

$$T_m\phi_1(\tau,z) = m^{k-1} \sum_{\binom{a\ b}{c\ d}} (c\tau+d)^{-k}\, e^{-\frac{2\pi imcz^2}{c\tau+d}}\, \phi_1\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{m\ z}{c\tau+d}\right)$$

où la sommation porte comme d'habitude sur un système de représentants pour les matrices $\binom{a\ b}{c\ d} \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant m modulo multiplication à gauche par des éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$, alors on vérifie facilement que $T_m\phi_1$ est bien définie (c'est-à-dire indépendante du choix des représentants), qu'elle est une forme de Jacobi de poids k et indice m, et (en choisissant les $\binom{a\ b}{c\ d}$ triangulaires) qu'elle a le même développement de Fourier que ϕ_m. La fonction ϕ_m satisfait donc à (21a) pour tout $m\geq 1$. Enfin, pour m=0 on trouve

$$A(n,r,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } r<0, \\ \sigma_{k-1}(n)\; c(0) & \text{si } r=0,\ n>0, \\ \frac{1}{2}\zeta(1-k)\; c(0) & \text{si } r=n=0, \end{cases}$$

où $\sigma_{k-1}(n)$ désigne comme d'habitude la somme des (k-1)-ièmes puissances des diviseurs positifs de n. On a donc $\phi_0(\tau,z) = c(0)\,G_k(\tau)$ (indépendant de z), où $G_k = \frac{1}{2}\zeta(1-k)+\sum_{n>0}\sigma_{k-1}(n)q^n$ est la série d'Eisenstein en M_k, et (21a) est satisfait pour m=0 aussi. Cela termine la démonstration du Théorème 2.

Il reste à établir le Théorème 1. Les implications i)⇒ii)⇒iii) sont triviales. Soit donc F une forme de Siegel ayant la propriété iii), donc telle que $A(Q) = c(d(Q))$ pour toute Q primitive et des certains coefficients $c(n)$, $n\equiv 0$ ou 3 (mod 4). Le Théorème 3 implique que ces coefficients sont les coefficients de Fourier d'une certaine forme $h\in M^+_{k-1/2}$, et en soustrayant de F la forme en $M_k(\Gamma_2)$ associée à h par le Théorème 2, on peut se ramener au cas $c(n)=0$. L'énoncé qu'il nous faut démontrer est donc: si F est une forme modulaire par rapport à Γ_2 dont les coefficients de Fourier $A(Q)$ s'annullent pour toute forme Q primitive, alors $F\equiv 0$. Pour le voir, soit m le plus petit entier tel que $\phi_m\neq 0$ et j le plus petit entier tel que $\phi^j_m(\tau)= \frac{\partial^j}{\partial z^j}\,\phi_m(\tau,z)\big|_{z=0}\not\equiv 0$. Alors ϕ^j_m est une forme modulaire (même parabolique si j>0) de poids m + 2j sur SL_2Z, et l'hypothèse faite sur F entraîne que m>1 et que le n-ième coefficient de Fourier de ϕ^j_m est nul pour tout n avec $(n,m) = 1$; il est bien connu qu'une telle forme n'existe pas.

§4. Compléments.

1. Séries d'Eisenstein

Le groupe $\Gamma_0(4)$ ayant deux pointes régulières, il y a deux séries d'Eisenstein de poids k-1/2 pour ce groupe, mais une seule (à une constante près) qui appartient à $M^+_{k-1/2}$; c'est la forme $\mathcal{H}_{k-1}$ introduite par Cohen [3]. Son développement de Fourier, donné par Cohen, se déduit de l'énoncé du théorème de Kohnen donné au §2, car, pour chaque discriminant D d'un corps quadratique imaginaire, $S^+_D(\mathcal{H}_{k-1})$ doit être multiple de la série d'Eisenstein $G_{2k-2} = \frac{1}{2}\zeta(3-2k) + \sum\sigma_{2k-3}(n) \in M_{2k-2}$, ce qui entraîne (d'après (16))

$$\mathcal{H}_{k-1}(\tau) = \sum_{N=0}^{\infty} H(k-1,N)\ q^N$$

avec

$$\sum_{d|n} \left(\frac{D}{d}\right) d^{k-2} H(k-1,\frac{n^2}{d^2}|D|) = \frac{H(k-1,0)}{\zeta(3-2k)} L_D(2-k)\sigma_{2k-3}(n),$$

donc (avec une normalisation convenable)

$$H(k-1,N) = \begin{cases} \zeta(3-2k) & \text{si } N=0, \\ 0 & \text{si } N\equiv 1,2 \pmod 4, \\ L_D(2-k)\sum_{d|n}\mu(d)\left(\frac{D}{d}\right)d^{k-2}\sigma_{2k-3}\left(\frac{n}{d}\right) & \text{si } N=|D|n^2>0. \end{cases}$$

Or, à une constante multiplicative près, la forme $F\in M^*_k(\Gamma_2)$ qui correspond à $\mathcal{H}_{k-1}$ sous l'isomorphisme du Théorème 2 est forcément la série d'Eisenstein

$$G_k^{(2)}(Z) = \sum_{\{C,D\}} \det(CZ+D)^{-k} \qquad (Z\in H_2)$$

(sommation sur un système de paires de matrices non-associées, symétriques et sans facteur commun $C,D\in M_2(\mathbb{Z})$), car c'est la seule forme propre non parabolique en $M_k(\Gamma_2)$. Les coefficients de F sont donnés d'après le Théorème 2 par

$$A(0) = \frac{1}{2}\zeta(1-k)\ H(k-1,0) = \frac{1}{2}\zeta(1-k)\ \zeta(3-2k),$$

$$A(Q) = \sum_{d|e(Q)} d^{k-1} H(k-1, d(Q)/d^2) \qquad (Q \geq 0,\ Q \neq 0);$$

le terme constant de $G_k^{(2)}$ étant 1, son coefficient Q-ième doit être $A(O)^{-1}A(Q)$. On retrouve alors le développement de Fourier obtenu (avec des calculs bien plus compliqués) par Maass ([9], correction en [10]).

2. Formes de Jacobi. Formule de trace

Désignons par $J_{k,m}$ $(k,m\in\mathbb{N})$ l'espace des formes de Jacobi de poids k et indice m au sens du §3. Le contenu essentiel de ce papier était la construction de deux isomorphismes canoniques et commutant aux opérateurs de Hecke

$$M_k^*(\Gamma_2) \xrightarrow{\sim} J_{k,1} \xleftarrow{\sim} M_{k-1/2}^+,$$

le premier étant la restriction à l'espace de Maass de l'application $M_k(\Gamma_2) \to J_{k,1}$ qui envoie une forme de Siegel à son premier coefficient de Fourier-Jacobi, le deuxième l'application qui envoie $\sum c(n)\, q^n$ sur $\sum_{n\equiv -r^2 (4)} c(n)\, q^{(n+r^2)/4}\zeta^r$. Une fois ceci établi, la conjecture de Saito-Kurokawa sur la correspondance entre $M_k^*(\Gamma_2)$ et M_{2k-2} suivait immédiatement des résultats de Kohnen sur la correspondance entre $M_{k-1/2}^+$ et M_{2k-2}. Or, ceux-ci sont basés sur une formule de trace pour les opérateurs de Hecke en poids demi-entier due à Niwa [16]. On peut donc demander s'il est possible de démontrer directement la correspondance $J_{k,1} \leftrightarrow M_{2k-2}$ par moyen d'une formule de trace, sans passer par les formes de poids demi-entier, et retrouver ainsi la conjecture de Saito-Kurokawa. Cela s'avère praticable: par une formule analogue à (15) on peut définir pour chaque premier p un opérateur de Hecke sur $J_{k,m}$ (à ne pas confondre avec l'opérateur $T_m : J_{k,1} \to J_{k,m}$ utilisé au §3) et en calculer la trace au moyen d'une fonction noyau comme dans le cas des formes modulaires ordinaires, et le résultat que l'on trouve pour m=1 est identique avec la formule d'Eichler-Selberg pour $\mathrm{Tr}(T(p), M_{2k-2})$. Les calculs, qui seront décrits en [5], sont un peu étranges: par exemple, parmi les nombres de classes qui interviennent comme contributions "elliptiques" dans le cas classique, tous apparaissent ici de la même façon sauf un seul, qui se retrouve maintenant parmi les termes paraboliques et se présente là sous la forme d'une série infinie représentant la valeur à s=1 d'une série L. Il serait intéressant d'interpréter les résultats que l'on trouve pour les traces des opérateurs de Hecke agissant sur $J_{k,m}$, $m>1$.

3. Représentation de Weil

La représentation de Weil fournit un outil pour construire des correspondances entre des espaces de formes modulaires à partir des séries thêtas. La théorie générale en a été développée par Rallis et Schiffmann (voir e.g. [18]), le cas spécial des séries thêtas associées à des formes quadratiques indéfinies de signature (2,n-2) ayant été étudié auparavant par Oda [17]. Dans ce cas, on obtient une correspondance entre des formes modulaires ordinaires (de poids entier ou demi-entier, selon que n est pair ou impair) et des formes sur $SO(2,n-2)$. Les cas $SO(2,1)\sim SL_2(\mathbb{R})$ et $SO(2,2)\sim SL_2(\mathbb{R})\times SL_2(\mathbb{R})$ correspondent aux résultats de Shintani et Niwa sur la correspondance de Shimura et à ceux de l'auteur [22] sur le relèvement de Doi-Naganuma. Les cas $SO(2,3)\sim Sp_4(\mathbb{R})$ qui nous intéresse ici a été étudié le premier par Kudla [7] dans un papier qui est resté inédit puisqu'il était supplanté par les résultats plus généraux de Oda et de Rallis-Schiffmann (où ce cas particulier n'est cependant pas discuté explicitement, de façon qu'il est assez difficile de traduire leurs résultats en le langage des formes de Siegel). Quitte à vérifier des détails concernant les choix des réseaux et caractères, le niveau des formes obtenues, etc., la situation comme me l'a expliquée Kudla est comme suit:

D'après le résultat principal de [7], la fonction $\Omega(Z,\tau^*)$ définie par

$$\Omega(Z,\tau^*) = \sum_{N>0} N^{3/2-k}\omega_N(Z)e^{2\pi i N\tau^*} \quad (Z=\begin{pmatrix}\tau & z\\ z & \tau'\end{pmatrix}\in H_2, \tau^*\in H),$$

où

$$\omega_N(Z) = \sum_{\substack{(p,n,r,m,q)\in\mathbb{Z}^5\\ 4nm-r^2-4pq=N}} (p(\tau\tau'-z^2) + n\tau+rz+m\tau'+q)^{-k}$$

est pour k pair et ≥ 8 une forme modulaire sur Γ_2 de poids k par rapport à Z et une forme modulaire sur $\Gamma_0(4)$ de poids k-1/2 par rapport à τ^*. (La fonction Ω apparaît comme projection holomorphe de la série thêta attachée par la théorie de Weil à l'espace quadratique $(\mathbb{R}^5, 4nm-r^2-4pq)$.) On obtient donc par produit scalaire

$$h(\tau) \to F_h(Z) = \langle h,\Omega\rangle = \int_{H/\Gamma_0(4)} h(u+iv)\Omega(Z,u-iv)v^{k-\frac{1}{2}} \frac{du\,dv}{v^2}$$

une application $S^+_{k-1/2} \to S_k(\Gamma_2)$. Le Théorème 2.3 de [18], qui est une généralisation du résultat principal de [22], doit donner dans notre cas l'identité

$$\Omega(Z,\tau^*) = (\text{const.})\sum_{N>0} \omega_N^0(Z)\; P_N(\tau^*),$$

où $P_N(\tau^*)$ est la N-ième série de Poincaré en $S^+_{k-1/2}$ (caractérisée par $\langle h,P_N\rangle = c(N)$ pour $h = \sum c(n)q^n \in S^+_{k-1/2}$) et ω_N^0 est la somme des termes avec p=0 dans la série qui définit ω_N. On a donc

$$h(\tau) = \sum_n c(n)q^n \longrightarrow F_h(Z) = (\text{const.})\sum_N^{\infty} c(n)\;\omega_N^0(Z)$$

La formule de Lipschitz

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} (z+q)^{-k} = (\text{const.})\sum_{d=1} d^{k-1}\, e^{\pm 2\pi i dz} \quad (\pm z\in H)$$

donne alors

$$F_h(Z) = (\text{const}) \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{n,r,m\in\mathbb{Z} \\ n,m\geq 0}} d^{k-1} c(4nm-r^2) e^{2\pi i d(n\tau+rz+m\tau')} .$$

C'est la formule du Théorème 2.

Bibliographie

[1] Andrianov, A. N.: Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2 (en russe). Uspekhi Mat. Nauk 29 (1974) 43-110; trad. angl. en Russian Math. Surveys 29 (1974) 45-116.

[2] _____: Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture. Invent. math. 53 (1979) 267-280.

[3] Cohen, H.: Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters. Math. Ann. 217 (1975) 171-185.

[4] Evdokimov, S. A.: Une caractérisation de l'espace de Maass de formes paraboliques modulaires de Siegel de genre 2 (en russe). Mat. Sbornik (154) 112 (1980) 133-142.

[5] Eichler, M. et Zagier, D.: Jacobi forms (en préparation).

[6] Kohnen, W.: Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$. Math. Ann. 248 (1980) 249-266.

[7] Kudla, S.: On modular forms of $\frac{1}{2}$- integral weight and Siegel modular forms of genus 2. Maryland 1977 (inédit)

[8] Kurokawa, N.: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. Invent. Math. 49 (1978) 149-165.

[9] Maass, H.: Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 34 (1964) 1-25.

[10] _____: Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 38 (1972) 1-13.

[11] _____: Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades. Math. Ann. 232 (1978) 163-175.

[12] _____: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades. Invent. math. 52 (1979) 95-104.

[13] ______: _____, II. Invent. math. 53 (1979) 249-253.

[14] ______: _____, III. Invent. math. 53 (1979) 255-265.

[15] Niwa, S.: Modular forms of half-integral weight and the integral of certain theta-functions. Nagoya Math. J. 56 (1974) 147-161.

[16] _____: On Shimura's trace formula. Nagoya Math. J. 66 (1977) 183-202.

[17] Oda, T.: On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature (2,n-2). Math. Ann. 231 (1977) 97-144.

[18] Rallis, S. et Schiffmann, G.: On a relation between $\widetilde{SL}_2$ cusp forms and cusp forms on tube domains associated to orthogonal groups, à paraître en Trans. A.M.S.

[19] Resnikoff, H. L. et Saldaña, R. L.: Some properties of Fourier coefficients of Eisenstein series of degree two. J. f. d. reine u. angew. Math. 265 (1974) 90-109.

[20] Saldaña, R. L.: The Fourier coefficients of Siegel modular forms of degree two. Master's thesis, Rice Univ., 1971.

[21] Shimura, G.: On modular forms of half-integral weight. Ann. of Math. 97 (1973) 440-481.

[22] Zagier, D.: Modular forms associated to real quadratic fields. Invent. math. 30 (1975) 1-46.