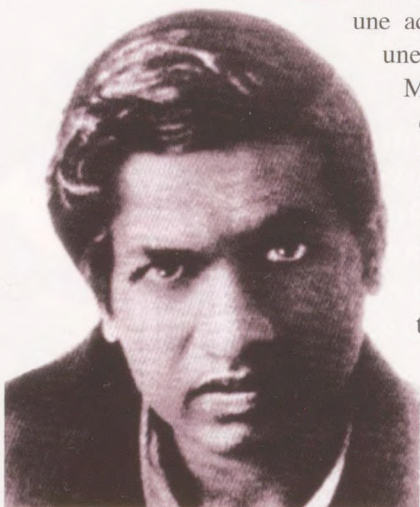


Ramanujan à Hardy :

de la première à la dernière lettre

Dans cette conférence donnée à la BnF, Don Zagier nous conte une histoire fabuleuse : celle du génie autodidacte Ramanujan, de sa rencontre (d'abord épistolaire) avec le grand mathématicien Hardy, de ses découvertes prodigieuses dont les développements ont encore cours aujourd'hui.



Il existe des opinions diverses quant à la question de savoir si les mathématiques sont plutôt une activité scientifique ou une activité artistique.

Mais tout le monde est d'accord pour dire qu'elles ne sont pas une activité romantique. L'histoire dont je vais vous parler est l'une des rares exceptions à cette règle.

C'est l'histoire d'un génie autodidacte et inconnu dans son propre

pays qui a osé écrire à l'un des mathématiciens les plus célèbres de son époque et lui révéler quelques-unes de ses découvertes ; l'histoire de la réception chaleureuse et généreuse dont a bénéficié cette lettre et de la collaboration extraordinaire qui en a découlé ; l'histoire enfin de la glorieuse dernière lettre du génie à son ami, écrite au milieu d'une période de maladie et dépression et peu avant sa mort prématurée et qui malgré cela ne cesse jusqu'à aujourd'hui de nous fasciner et de nous éblouir. Le génie inconnu c'était l'Indien Srinivasa Ramanujan, son bienfaiteur altruiste l'Anglais Godfrey Harold Hardy. Je vais vous raconter les circonstances qui les ont unis et tenter d'expliquer aussi, un peu, les mathématiques dont il s'agit dans cette étonnante histoire.

Chronologie

- 1877 :** Naissance de G. H. Hardy.
- 1887 :** Naissance de Srinivasa Ramanujan.
- 1913 :** Première lettre de Ramanujan à Hardy.
- 1914-1918 :** Séjour de Ramanujan en Angleterre.
- 1920 :** Dernière lettre de Ramanujan à Hardy.
Naissance des « mock theta functions »
- 1920 :** Mort de Ramanujan.
- 1947 :** Mort de Hardy.

La première lettre

Imaginez-vous un instant être un mathématicien renommé et recevoir un beau jour une lettre d'un inconnu qui commence ainsi :
« *Cher monsieur, Je me permets de me présenter comme un employé dans la*

comptabilité du Bureau Maritime de Madras avec un salaire de seulement 20 livres par an. »,

et qui continue ensuite en disant que l'auteur a environ 23 ans, qu'il n'a pas eu de formation universitaire, mais qu'il a ouvert de nouveaux chemins et obtenu des résultats que les mathématiciens de son entourage qualifient de « saisissants ». La lettre continue alors avec une douzaine de pages couvertes densément de formules rébarbatives et d'un aspect peu ordinaire, plus d'une centaine au total.

Votre première réaction sera sans doute de jeter la lettre à la poubelle comme vous avez l'habitude de le faire avec les lettres que vous recevez de temps en temps, écrites par des demi-fous épris des mathématiques mais qui n'y comprennent rien. En fait c'est exactement ce que deux de vos collègues illustres ont déjà fait, sans bien sûr que vous en soyez conscient maintenant.

Mais votre deuxième réaction — si vous êtes Hardy — est de regarder de plus près quelques-unes des formules, de constater

qu'elles ont un certain vous-ne-savez-quoi, et

de courir vite chercher votre bon ami Littlewood pour passer le reste de la soirée à étudier ensemble avec lui cette missive extraordinaire. Et avant que le jour ne finisse, bien que très loin encore d'avoir pu vérifier tous les

résultats ou même pu comprendre d'où ils pourraient venir, vous aurez conclu : cette lettre, qui est de toute évidence l'œuvre, soit d'un fou, soit d'un tricheur, soit d'un génie, doit être celle d'un génie, car aucun fou ni

aucun tricheur n'aurait l'imagination d'inventer des résultats aussi rocambolesques s'ils n'étaient pas vrais.

Pendant trois semaines vous travaillez fièvreusement pour démontrer au moins quelques-uns des 120 théorèmes que contient la lettre. En quelques cas vous y parvenez aisément, en d'autres avec un mal incroyable, et en beaucoup d'autres pas du tout, mais même les formules d'apparence la plus innocente ont des propriétés cachées et surprenantes.

Trois semaines après avoir reçu la lettre, vous écrivez à son auteur :

« Cher monsieur, J'ai été hautement intéressé par votre lettre et les théorèmes que vous énoncez... » et vous continuez en lui priant instamment de vous envoyer des démonstrations rigoureuses de ses résultats.

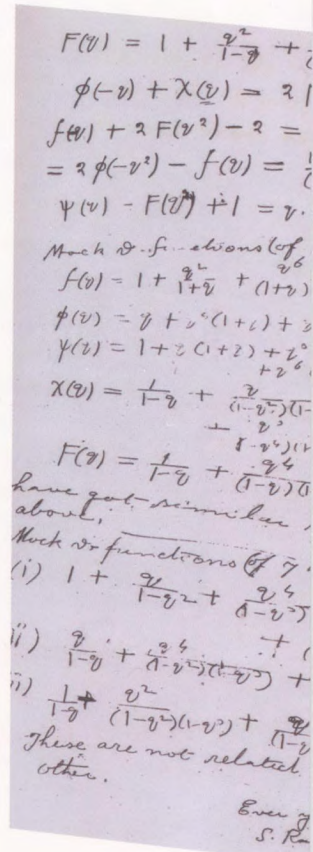
Une rencontre étonnante et fructueuse

C'est donc ainsi que cela s'est passé. Treize mois après avoir reçu la lettre de Ramanujan (en avril 1914), Hardy, par l'intermédiaire de son ami

Neville qui voyage à Madras pour surmonter les obstacles, réussit à faire venir Ramanujan à Cambridge. Commence alors une collaboration intense, qui deviendra célèbre dans l'histoire des mathématiques.

Ramanujan passera quatre années fructueuses en Angleterre.

Fructueuses, mais en même temps malheureuses : il souffre beaucoup du climat et aussi de la nourriture anglaise. (Non, ce n'est pas la qualité de la cuisine anglaise qui lui pose des problèmes, mais la difficulté d'y suivre un régime végétarien.) Malgré son amitié avec Hardy,



les résultats magnifiques qu'il obtient seul et avec lui, et les honneurs qu'il reçoit — il deviendra en 1918 premier Indien Fellow of the Royal Society et Fellow of Trinity, certes non sans beaucoup d'opposition de nature raciste de la part de certains collègues anglais — il devient malade et dépressif, manifestant un vif désir de rentrer en Inde, ce qui est impossible à cause de la Première Guerre Mondiale. En 1918 il fait une tentative de suicide en se jetant devant un métro et est sauvé par miracle.

Il rentre chez lui peu de temps après. En janvier 1920, exactement sept années après sa première lettre à Hardy, il lui envoie sa dernière lettre, sur laquelle je reviendrai. Quelques mois plus tard, alors que son état de santé avait semblé s'améliorer, il meurt, en avril 1920. Il a 32 ans.

Formes modulaires

Pour vous présenter les travaux réalisés par Ramanujan, je ne peux évidemment pas parler des 120 théorèmes contenus dans sa première lettre à Hardy. Je me bornerai aux résultats liés à une seule théorie — la théorie des formes modulaires, qui est ma propre spécialité et que j'aime beaucoup.

Une forme modulaire est un objet mathématique à deux visages, l'un visible et l'autre caché. Le visage visible est ce qu'on appelle une *q-série* et n'est rien d'autre qu'une manière compacte et facilement maniable d'écrire une suite de nombres à laquelle on s'intéresse.

Par exemple, au lieu d'écrire un tableau :

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	...	200	...
<i>p(n)</i>	1	2	3	5	7	11	...	3 972 999 029 388	...

pour les valeurs de la fonction « partition » (voir l'encadré *Partitions*), je pourrais

représenter les mêmes informations sous la forme de la *q-série* suivante :

$$P(q) = q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + \dots + 3\,972\,999\,029\,388q^{200} + \dots$$

Cette *q-série*, déjà utilisée par Euler, s'avère être une forme modulaire (ou presque... en fait, pour avoir une forme modulaire il faut rajouter 1 et multiplier le tout par $q^{-1/24}$).

La beauté de la théorie est qu'il y a aussi un visage caché des formes modulaires, qui est une sorte de symétrie très raffinée (que l'on appelle non-abélienne) que je ne peux mieux vous rendre visible qu'en vous montrant le dessin d'Escher ci-dessous. Pour s'apercevoir de cette symétrie, il faut regarder une expression comme $P(q)$ non seulement comme une façon pratique d'organiser une liste de nombres, mais aussi comme une « vraie » fonction de q , ou plutôt d'une autre variable z qui est liée à q par une formule simple (à savoir $q = e^{2\pi iz}$).



Circle Limit IV de M.C. Escher

©M.C. Escher Company

Les formes modulaires ont la même symétrie subtile, « non-abélienne », que ce dessin d'Escher.

Une fois que l'on connaît cet aspect caché des *q-séries* modulaires, les formules les plus compliquées deviennent évidentes. Les propriétés de symétrie impliquent en effet que chaque forme

Partitions

Pour vous donner une petite idée de l'œuvre collaborative de Hardy et Ramanujan, voici une de leurs découvertes les plus célèbres. Il s'agit du nombre des partitions d'un entier donné, un problème qui remonte à Euler et donc au XVIII^e siècle. Pour chaque entier n on se demande de combien de façons on peut grouper n objets. On note ce nombre $p(n)$. Par exemple, pour $n = 5$ il y a sept groupements possibles, $1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 2$, $1 + 1 + 3$, $1 + 2 + 2$, $1 + 4$, $2 + 3$, 5 , et par conséquent $p(5)$ est égal à 7.

Pour $n = 1, 2, 3, 4$ ou 6 on peut compter les partitions de la même façon :

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 : 1 \\ p(2) &= 2 : 1 + 1, 2 \\ p(3) &= 3 : 1 + 1 + 1, 1 + 2, 3 \\ p(4) &= 5 : 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 3, 2 + 2, 4 \\ p(6) &= 11 : 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 2, \\ &\quad 1 + 1 + 1 + 3, 1 + 1 + 2 + 2, 1 + 1 + 4, \\ &\quad 1 + 2 + 3, 1 + 5, 2 + 2 + 2, 2 + 4, 3 + 3, 6 \end{aligned}$$

mais cette méthode marcherait évidemment assez mal pour $n = 200$, puisque $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$. Cette valeur a été calculée (à la main !) par Major MacMahon en 1917 en utilisant une formule récursive due à Euler.

Le résultat de Hardy et Ramanujan n'est pas une formule exacte de $p(n)$, mais une approximation si incroyablement précise qu'elle permet un calcul exact. Elle consiste en une somme de termes élémentaires (mais trop compliqués pour être détaillés ici) dont déjà les deux premiers permettent d'obtenir $p(200)$ à une erreur d'environ 82 près et les huit premiers à une erreur de 0,004 près. Sachant que $p(200)$ est un entier, on retrouve donc même sa valeur exacte.

Un bel exemple des profondeurs cachées de la théorie des nombres !

modulaire a une « empreinte digitale » consistant en une liste explicite d'invariants calculables (le *poids*, le *niveau*, et les premiers *coefficients* de la q -série) qui la caractérisent totalement. N'importe quelle identité entre q -séries, quelle que soit la profondeur de l'énoncé mathématique qu'elle incorpore, devient donc triviale dès qu'on sait que les deux q -séries dont il s'agit sont des formes modulaires : il suffit de comparer leurs empreintes. Si elles coïncident, c'est que les q -séries correspondent à la même fonction.

C'est une sorte de « principe magique » qui rend simples les choses les plus profondes ; par exemple, l'identité d'Euler concernant $p(n)$ mentionnée dans l'encadré *Partitions* et qu'Euler n'a pu démontrer

Il faudra aux autres mathématiciens des décennies pour démontrer des résultats que Ramanujan, lui, avait trouvés en quelques mois.

qu'après des années d'effort, devient presque banale quand on connaît la modularité de la fonction $P(q)$.

Ce « principe magique » des formes modulaires trouve de nombreuses applications dans les mathématiques actuelles. Par exemple, Andrew Wiles a démontré la modularité d'un certain type de q -séries (celles provenant des courbes elliptiques, où le coefficient de q^n est lié au nombre des solutions d'une certaine congruence modulo n) et cela a donné comme corollaire la preuve du célèbre théorème de Fermat !

Quelques fausses fonctions modulaires de Ramanujan

Avec sa dernière lettre, Ramanujan envoie à Hardy quelques exemples de ce qu'il appelle des « mock theta-functions », autrement dit des « fausses fonctions modulaires », comme celle-ci :

$$1 + \frac{q}{1+q^2} + \frac{q^4}{(1+q^2)(1+q^4)} + \frac{q^9}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)} + \dots$$

Il appelle celle qui suit « fausse fonction modulaire d'ordre 5 » :

$$1 + \frac{q}{1+q} + \frac{q^4}{(1+q)(1+q^2)} + \frac{q^9}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)} + \dots$$

Et celle-là « fausse fonction modulaire d'ordre 7 » :

$$1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^3)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)} + \dots$$

Il ne précise pas, bien entendu, ce qu'il entend par là...

Ramanujan n'a jamais compris de façon essentielle ce deuxième aspect des formes modulaires. Il a presque toujours travaillé avec les q -séries elles-mêmes, sans exploiter les propriétés de symétrie des fonctions. Puisqu'il était un calculateur formel de génie, le seul dans l'histoire des mathématiques récentes qui puisse être placé au même rang qu'Euler et Jacobi, il a réussi malgré cela à faire beaucoup de découvertes remarquables concernant les formes modulaires, comme celles qu'il expose dans sa première lettre à Hardy. Mais il était handicapé quand même et ses découvertes dans ce domaine n'ont jamais atteint la même importance que celles des chercheurs qui l'ont suivi comme Mordell, Hecke ou Eichler.

La dernière lettre

Quelques mois avant sa mort, Ramanujan envoie sa toute dernière lettre à Hardy, où il l'informe de la découverte d'une nouvelle classe de fonctions qu'il appelle des

mock theta-functions, « mock » étant un synonyme anglais un peu recherché pour « faux » ou « imitation » et « theta-functions » la terminologie utilisée par Ramanujan pour ce que nous appelons aujourd'hui les formes modulaires. Il s'agit donc de « fausses formes modulaires ». Ramanujan ne les définit pas, mais il décrit les propriétés caractéristiques essentielles qu'il voudrait que ces fonctions possèdent et en donne 17 exemples (dont ceux de l'encadré *Quelques fausses fonctions modulaires de Ramanujan*), plus un certain nombre de relations entre ces exemples.

Il range ces « fausses formes modulaires » en trois groupes : quatre sont d'« ordre » 3, dix sont d'« ordre » 5 et trois sont d'« ordre » 7 (sans toutefois que Ramanujan définisse précisément ce qu'est l'ordre).

Les identités qu'il donne ont toutes été démontrées par des mathématiciens ultérieurs – Watson, Andrews, Hickerson et d'autres – au prix de bien des difficultés, les dernières conjectures n'étant résolues qu'assez récemment.

On se souvient que, concernant les formes modulaires, Ramanujan avait été handicapé vis-à-vis des mathématiciens européens par son manque de connaissances théoriques. En revanche, dans le cadre des « fausses formes modulaires », c'est l'inverse. Puisque personne ne connaît, à cette époque, de « deuxième visage », de « propriété magique » à exploiter chez les « fausses formes modulaires », l'avantage va à celui qui possède le plus de talent pour le calcul formel, domaine où Ramanujan est imbattable. Finalement, il faudra aux autres mathématiciens des décennies pour démontrer des résultats que Ramanujan, lui, avait trouvés en quelques mois.

Les « fausses formes modulaires », qui étaient un peu tombées dans l'oubli, sont redevenues actuelles. D'une part, on a découvert qu'elles étaient liées à des questions profondes en théorie des nombres, topologie et physique quantique. D'autre part, Sander Zwegers, mon élève, a réussi à déceler la symétrie cachée des fausses formes modulaires correspondant à celle que l'on connaissait pour les formes modulaires. Avec la théorie qu'il a élaborée et que j'ai développée un peu plus loin pendant ces derniers mois, les fausses formes modulaires ont désormais, elles aussi, une « empreinte digitale » calculable qui les détermine complètement, et à l'aide de laquelle toutes les identités entre ces fonctions deviennent démontrables par des calculs mécaniques.

On arrive donc non seulement à démontrer de nouvelles identités entre les « fausses fonctions modulaires » introduites par Ramanujan lui-même, mais aussi à comprendre l'« ordre » mystérieux qu'il avait introduit. Enfin, 85 ans après sa mort, on parvient à rajouter à ses exemples célèbres d'ordre 3, 5 et 7 des exemples de n'importe quel ordre premier ayant des propriétés exactement analogues !

Les découvertes de Ramanujan, et en particulier les fonctions mystérieuses et merveilleuses qu'il a introduites dans la dernière lettre qu'il a envoyée à son ami Hardy, restent donc fécondes aujourd'hui. Elles continueront très certainement à influencer, de façon subtile et fascinante, le développement des mathématiques et de la physique théorique dans les années à venir.

D. Z.

* Résumé de la conférence donnée par Don Zagier le 16 mars 2005 à la Bibliothèque nationale de France, dans le cadre du cycle *Un texte, un mathématicien* proposé par la BnF, la Société mathématique de France, France Culture et *Tangente*.

$$F(v) = 1 + \frac{v^2}{1-v} + \frac{v^8}{(1-v)(1-v^2)} + \dots$$

$$\phi(-v) + \chi(v) = 2F(v)$$

$$f(v) + 2F(v^2) - 2 = \phi(-v^2) + \psi(v)$$

$$= 2\phi(-v) - f(v) = \frac{1-2v+2v^2-2v^3}{(1-v)(1-v^2)(1-v^4)} + \dots$$

$$\psi(v) - F(v^2) + 1 = v \cdot \frac{1+v^2+2v^4+v^6}{(1-v^2)(1-v^4)(1-v^8)} + \dots$$

Much of functions of 5th order

$$f(v) = 1 + \frac{v^2}{1+v} + \frac{(1+v)(1+v^2)}{(1+v^2)(1+v^4)} + \dots$$

$$\phi(v) = v + v^2(1+v) + v^3(1+v^2)(1+v^4) + \dots$$

$$\psi(v) = 1 + v(1+v^2) + v^2(1+v^2)(1+v^4) + \dots$$

$$\chi(v) = \frac{1}{1-v} + \frac{v}{(1-v)(1-v^2)} + \frac{(1-v^2)}{(1-v^2)(1-v^4)} + \dots$$

$$F(v) = \frac{1}{1-v} + \frac{v^2}{(1-v)(1-v^2)} + \frac{v^8}{(1-v)(1-v^2)(1-v^4)} + \dots$$

have got similar relations about

Much of functions of 7th order

$$(i) \quad 1 + \frac{v^2}{1-v} + \frac{v^4}{(1-v)(1-v^2)} + \dots$$

$$(ii) \quad \frac{v^2}{1-v} + \frac{v^4}{(1-v)(1-v^2)} + \frac{v^6}{(1-v)(1-v^2)(1-v^4)} + \dots$$

$$(iii) \quad \frac{1}{1-v} + \frac{v^2}{(1-v)(1-v^2)} + \frac{v^4}{(1-v)(1-v^2)(1-v^4)} + \dots$$

These are not related to each other.

Résultats de Sander Zwegers sur les « mock theta-fonctions » de Ramanujan

Sander Zwegers a découvert les propriétés-clefs des « mock theta-fonctions » de Ramanujan :

- il a trouvé la propriété de symétrie cachée analogue à celle des formes modulaires,
- il a établi l'analogue du « principe magique » pour les fausses formes modulaires, ce qui permet de démontrer facilement les identités entre ces fonctions,
- il a montré que plusieurs constructions déjà connues en mathématiques produisent des fausses formes modulaires :
 - sommes de Lerch,
 - séries thêta associées aux formes quadratiques indéfinies,
 - coefficients de Fourier des formes de Jacobi méromorphes,
 - certaines séries q -hyperc géométriques.