THÉORIE DES NOMBRES. — *Nombres de classes et formes modulaires de poids* 3/2. Note (*) de M. **Don Zagier**, transmise par M. Jean-Pierre Serre.

On définit une série d'Eisenstein de poids 3/2 dont la partie holomorphe a des nombres de classes comme coefficients de Fourier. On en déduit des relations entre nombres de classes analogues à celles de Hurwitz.

1. Relations entre nombres de classes. — En 1860 Kronecker a trouvé des relations frappantes entre les nombres de classes de formes quadratiques binaires définies positives. Ces relations ont été étudiées et généralisées depuis par de nombreux mathématiciens. Une telle relation, due à Hurwitz [1], est donnée par

$$\sum_{s \in \mathbf{Z}} \mathrm{H}(4\mathrm{N}-s^2)+\sum_{\substack{\mathrm{N}=\lambda\lambda' \\ \lambda,\lambda'>0}} \min(\lambda,\lambda') = \begin{cases} -\dfrac{1}{12} & \text{si} \quad \mathrm{N}=0, \\ \sigma(\mathrm{N}) & \text{si} \quad \mathrm{N}>0. \end{cases}$$

Dans cette formule, H (n) est défini pour $n > 0$ comme le nombre de classes [2] des formes quadratiques binaires définies positives de discriminant $-n$; on pose

$$\mathrm{H}(0)=\frac{-1}{12} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}(n)=0 \quad \text{si} \quad n \notin \mathbf{N}.$$

La sommation $\sum_s \mathrm{H}(4\,\mathrm{N}-s^2)$ est donc finie. La deuxième sommation porte sur les décompositions de N en facteurs positifs. La fonction $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n. Le membre de droite de la formule est donc $-1/12$ fois le coefficient de $e^{2\pi i \mathrm{N} z}$ dans le développement de Fourier de la série d'Eisenstein normalisée de poids 2. Notre résultat principal généralise cette formule :

Théorème 1. — *Soit* D *le discriminant d'un corps quadratique* K. *Pour tout* $\mathrm{N} \geqq 0$, *soit*

$$c(\mathrm{N})=\sum_{s \in \mathbf{Z}} \mathrm{H}\left(\frac{4\mathrm{N}-s^2}{\mathrm{D}}\right)+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}}}\sum_{\substack{\mathrm{N}=\lambda\lambda' \\ \lambda,\lambda'>0}} \min(\lambda,\lambda'),$$

où la deuxième sommation porte sur les entiers totalement positifs λ *de* K *de norme* $\lambda\lambda' = \mathrm{N}$. *Alors* $\sum_{\mathrm{N}=0}^{\infty} c(\mathrm{N})\, e^{2\pi i \mathrm{N} z}$ *est le développement de Fourier d'une forme modulaire de poids* 2 *pour le sous-groupe de congruence* $\Gamma_0(\mathrm{D})$ *et le caractère* $\left(\dfrac{\mathrm{D}}{\cdot}\right)$.

Noter que la première sommation est finie, seuls les s avec $|s| \leqq 2\sqrt{\mathrm{N}}$ et $s^2 \equiv 4\,\mathrm{N}$ (mod D) y contribuant des termes non nuls, et que la deuxième est une somme finie de séries géométriques, donc convergente. Puisque pour chaque D on connait une base de l'espace de formes modulaires de poids 2 pour Γ_0 (D) et $\left(\frac{\mathrm{D}}{}\right)$, on déduit du théorème des identités explicites. Par exemple, si D = 5 on trouve

$$c(\mathrm{N}) = \frac{5}{12} \sum_{d \mid \mathrm{N}} \left(\frac{d}{5}\right)\left(d + \frac{\mathrm{N}}{d}\right).$$

2. Séries d'Eisenstein de poids 3/2. — Hecke [3] a fait la remarque que, d'après le théorème de Gauss-Hermite, H (N) est lié au nombre des représentations de N comme somme de trois carrés, donc qu'on devrait s'attendre à ce que la fonction

$$\mathscr{H}(z) = \sum_{\mathrm{N}=0}^{\infty} \mathrm{H}(\mathrm{N})\, q^{\mathrm{N}} \qquad (z \in \mathfrak{H} = \text{demi-plan supérieur, } q = e^{2\pi i z})$$

soit une forme modulaire de poids 3/2; si c'était le cas, on aurait une explication bien naturelle de la formule de Hurwitz, car $\sum_s \mathrm{H}(\mathrm{N} - s^2)$ serait le N-ième coefficient de Fourier de la forme modulaire $\mathscr{H}(z)\,\theta(z)$ de poids 2. [Ici $\theta(z) = \sum e^{2\pi i n^2 z}$.]

Malheureusement, $\mathscr{H}(z)$ n'est pas une forme modulaire. On a :

Théorème 2. — *La fonction non analytique*

$$\mathscr{F}(z) = \mathscr{H}(z) + y^{-1/2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \beta(4\pi n^2 y)\, e^{-2\pi i n^2 z} \qquad (z = x + iy \in \mathrm{H}),$$

où $\beta(t) = (1/16\,\pi) \int_1^{\infty} u^{-3/2} e^{-ut}\, du$, *se transforme pour* Γ_0 (4) *comme une forme modulaire de poids* 3/2 :

$$\mathscr{F}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{-1}{d}\right)^{1/2} (cz+d)^{3/2}\, \mathscr{F}(z) \qquad \left(z \in \mathfrak{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)\right).$$

Corollaire. — *La fonction* $\mathscr{H}(z)$ *se transforme pour* Γ_0 (4) *par*

$$\mathscr{H}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{-1}{d}\right)^{1/2} (cz+d)^{3/2}\, \mathscr{H}(z) - \frac{1+i}{16\,\pi} \int_{-a/c}^{i\infty} \frac{\theta(t)\, dt}{(t+z)^{3/2}}.$$

Pour déduire le théorème 1, on montre par un calcul direct que la fonction

$$\mathrm{W}_z(\lambda, \lambda') = \frac{2}{\sqrt{y}}\, \beta(\pi y (\lambda - \lambda')^2)\, e^{2\pi i z \lambda\lambda'} - \begin{cases} \dfrac{1}{2} \min(|\lambda|, |\lambda'|)\, e^{2\pi i z \lambda\lambda'} & \text{si } \lambda\lambda' > 0, \\ 0 & \text{si } \lambda\lambda' \leqq 0, \end{cases}$$

$(z \in \mathfrak{H}, \lambda, \lambda' \in \mathbf{R})$ a $z^{-2}\, \mathrm{W}_{-1/z}(\lambda, \lambda')$ comme transformée de Fourier. Alors la formule de Poisson implique que la fonction $\mathrm{W}(z) = \sum \mathrm{W}_z(\lambda, \lambda')$ (sommation sur tous les entiers $\lambda \in \mathrm{K}$) est une forme modulaire non analytique de poids 2 pour Γ_0 (D) et $\left(\frac{\mathrm{D}}{}\right)$. Cette fonction est une sorte de série thêta associée à la forme quadratique indéfinie $\lambda\lambda'$. Le théorème 1 est maintenant une conséquence de l'identité

$$\sum_{\mathrm{N}=0}^{\infty} c(\mathrm{N})\, e^{2\pi i \mathrm{N} z} = \sum_{j \,(\mathrm{mod}\, 4)} \mathscr{F}\left(\mathrm{D}\frac{z+j}{4}\right) \theta\left(\frac{z+j}{4}\right) - \mathrm{W}(z).$$

Les théorèmes 1 et 2 sont les analogues pour $r = 1$ des résultats de H. Cohen [4] pour $r > 1$ concernant une certaine fonction arithmétique $\mathrm{H}(r, \mathrm{N})$ qui est liée à la valeur de $\mathrm{L}\left(r, \left(\frac{-1}{-}\right)^r\left(\frac{\mathrm{N}}{-}\right)\right)$ et qui pour $r = 1$ coïncide avec $\mathrm{H}(\mathrm{N})$. Pour $r > 1$, Cohen démontre que $\sum \mathrm{H}(r, \mathrm{N})\, q^{\mathrm{N}}$ est une combinaison linéaire des deux séries d'Eisenstein de poids $r+1/2$ pour $\Gamma_0(4)$, donc une forme modulaire, et déduit l'analogue du théorème 1 sans le terme correctif $\sum \min(\lambda, \lambda')$. Pour $r = 1$, les séries d'Eisenstein en question ne convergent pas et il faut les traiter par la méthode bien connue de Hecke [5]; c'est ce qui fait paraître le terme non holomorphe en théorème 2.

3. Relation avec le groupe modulaire de Hilbert. — On peut associer à un corps quadratique réel K un groupe discret Γ (groupe modulaire de Hilbert) agissant sur $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$. On définit pour tout entier $\mathrm{N} > 0$ une courbe $\mathrm{T_N}$ (qui sera non vide seulement pour N un résidu quadratique du discriminant D) sur le quotient $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}/\Gamma$. Ces courbes jouent un rôle important quand on étudie la géométrie algébrique de la surface $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}/\Gamma$. Le nombre d'intersection de $\mathrm{T_N}$ avec $\mathrm{T_1}$ sur la surface $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}/\Gamma$ est égal au $c(\mathrm{N})$ du théorème 1 [6]. D'autre part, les $\mathrm{T_N}$ compactes engendrent un sous-espace de $\mathrm{H}_2(\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}/\Gamma)$ dont la dimension est liée à la dimension de l'espace des formes modulaires de poids 2 et de caractère $\left(\frac{\mathrm{D}}{-}\right)$ pour $\Gamma_0(\mathrm{D})$. Le théorème 1 avait été conjecturé par Hirzebruch et l'auteur pour expliquer cette relation.

Pour s'attaquer à cette conjecture, on avait introduit en [7] pour chaque $k\geqq 2$ pair des formes modulaires de Hilbert ω_{N} de poids k liées aux courbes $\mathrm{T_N}$, et montré que la fonction $z\mapsto\sum \mathrm{N}^{k-1}\,\omega_{\mathrm{N}}\, e^{2\pi i\mathrm{N}z}$ est une forme parabolique de poids k pour $\Gamma_0(\mathrm{D})$ et $\left(\frac{\mathrm{D}}{-}\right)$. En intégrant la forme $\mathrm{N}^{k-1}\,\omega_{\mathrm{N}}$ de façon convenable sur la courbe $\mathrm{T_1}$, on trouve le nombre

$$c_k(\mathrm{N}) = \sum_s p_k(s, \mathrm{N})\,\mathrm{H}\left(\frac{4\mathrm{N}-s^2}{\mathrm{D}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}}}\sum \min(\lambda, \lambda')^{k-1},$$

où les sommations sont les mêmes que dans le théorème 1 et $p_k(s, \mathrm{N})$ est le polynôme défini par

$$p_k(s, \mathrm{N}) = (\rho_+^{k-1}-\rho_-^{k-1})/(\rho_+-\rho_-), \qquad \rho_\pm = \frac{1}{2}(s\pm\sqrt{s^2-4\mathrm{N}}).$$

On déduit alors l'analogue suivant du théorème 1 :

Théorème 3. — *Pour $k > 2$ pair, la fonction $\sum_{\mathrm{N}=1}^{\infty} c_k(\mathrm{N})\, e^{2\pi i\mathrm{N}z}$ est une forme parabolique de poids k pour le groupe $\Gamma_0(\mathrm{D})$ et le caractère $\left(\frac{\mathrm{D}}{-}\right)$.*

Pour $\mathrm{D} = 1$ on trouve

$$c_k(\mathrm{N}) = \sum_{s\in\mathbf{Z}} p_k(s, \mathrm{N})\,\mathrm{H}(4\mathrm{N}-s^2) + \sum_{\substack{\mathrm{N}=\lambda\lambda' \\ \lambda,\lambda'\in\mathbf{Z} \\ \lambda,\lambda'>0}} \min(\lambda, \lambda')^{k-1};$$

le fait que $\sum c_k(\mathrm{N})\, q^{\mathrm{N}}$ soit une forme parabolique de poids k pour $\mathrm{SL}_2\, \mathbf{Z}$ résulte dans ce cas de ce que $c_k(\mathrm{N})$ est -2 fois la trace de l'opérateur de Hecke T (N) agissant sur l'espace de ces formes.

(*) Séance du 6 octobre 1975.

(1) HURWITZ, *Werke*, 2, p. 18.

(2) Les formes équivalentes à $a(x^2+y^2)$ et $a(x^2+xy+y^2)$ sont comptées respectivement avec les multiplicités 1/2 et 1/3. On a les valeurs

N..........	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
H (N)........	$\frac{-1}{12}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	1	0	0	1	$\frac{4}{3}$

(3) HECKE, *Werke*, p. 499-504.

(4) H. COHEN, *Sums Involving the Values at Negative Integers of* L-*Functions of Quadratic Characters*, *Math. Annalen* 217, 1975, p. 271-285.

(5) HECKE, *Werke*, p. 391.

(6) HIRZEBRUCH, *Kurven auf den Hilbertschen Modulflächen und Klassenzahlrelationen* (*Lecture Notes* n° 412, Springer-Verlag, p. 75-93).

(7) ZAGIER, *Comptes rendus*, 279, série A, 1974, p. 683 et *Modular Forms Associated to Real Quadratic Fields*, *Inv. Math.*, 30, 1975, p. 1-46.

Mathematisches Institut der Universität,
D-5300 *Bonn*,
Wegelerstrasse 10,
République Fédérale Allemande.