Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1973-1974 - exposé n° 21

UNE FORMULE-LIMITE DE KRONECKER POUR LES CORPS QUADRATIQUES REELS

par

DON ZAGIER

Soient K un corps de nombres de discriminant D et A une classe d'idéaux de K. La fonction zêta de A est définie par $\zeta_A(s) = \sum_{\mathfrak{A}\in A} N(\mathfrak{A})^{-s}$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et par prolongement méromorphe ailleurs. Considérons le développement en série de Laurent

$$(1) \quad |D|^{s/2}\,\zeta_A(s) = \frac{\varkappa}{s-1} + \rho(A) + \rho_1(A)(s-1) + \ldots (s\to 1).$$

On sait que le résidu $\varkappa$ ne dépend que du corps K (c'est ce fait-là qui permet la détermination analytique du nombre des classes $h(K)$, car il implique :

$$\frac{h(K)\,\varkappa}{\sqrt{D}} = \lim_{s\to 1}\,(s-1)\,\zeta_K(s)\,).$$

Nous nous intéressons au terme constant $\rho(A)$.

Si $\chi \neq \chi_o$ est un caractère sur le groupe des classes d'idéaux, on a :

$$\begin{aligned} L(\chi, s) &= \sum_{\mathfrak{A}} \frac{\chi(\mathfrak{A})}{N(\mathfrak{A})^s} = \sum_A \chi(A)\,\zeta_A(s) \\ &= \sum_A \chi(A)\left[\frac{\varkappa}{s-1} + \rho(A) + O(s-1)\right] \\ &= \sum_A \chi(A)\,\rho(A) + O(s-1) \end{aligned}$$

pour $s \to 1$, c'est-à-dire :

$$L(1, \chi) = \sum_A \chi(A)\, \rho(A) \qquad \text{(sommation finie)}.$$

Le calcul des $L(1, \chi)$ - qui est nécessaire pour trouver les nombres des classes des extensions abéliennes non ramifiées de K - peut donc se ramener à celui des $\rho(A)$.

Pour $K = \mathbb{Q}$, il n'y a qu'une classe A, avec $\zeta_A(s) = \zeta(s)$ (fonction zêta de Riemann) et on a $\rho(A) = \gamma$ (constant d'Euler). Le cas K = corps quadratique imaginaire a été traité par Kronecker qui trouva la célèbre « Formule-limite » exprimant :

$$\rho(A) = \lim_{s \to 1} \left[|D|^{s/2} \zeta_A(s) - \frac{\pi}{s-1} \right]$$

à l'aide de la fonction $\eta(z) = e^{\pi i z/12} \prod_{n-1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n z})$ de Dedekind. Plus précisément, il démontra :

<u>Soient</u> K <u>un corps quadratique imaginaire de discriminant</u> $D < 0$, A <u>une classe d'idéaux de</u> K <u>et</u> $\mathfrak{A} \in A$ <u>un idéal fractionnaire ayant une base</u> $\{1, w\}$ avec $\operatorname{Im}(w) > 0$. <u>Alors</u>

(2) $$\rho(A) = \phi(w),$$

<u>où</u> $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{H}$ = demi-plan complexe supérieur) <u>est une fonction différentiable indépendante de</u> A <u>et de</u> K, <u>à savoir</u>

(3) $$\phi(z) = 4\pi \left(\gamma - \frac{1}{2} \operatorname{Log}(2 \operatorname{Im}(z)) - \operatorname{Log} |\eta(z)|^2\right).$$

Pour tout autre corps, l'étude de $\zeta_A(s)$ devient beaucoup plus compliquée à cause du fait que le groupe des unités est d'ordre infini. Hecke [1] donna une formule dans le cas d'un corps quadratique réel, mais elle contient une intégrale et est beaucoup moins satisfaisante que (2). Avec la même méthode, son élève Meyer déduisait le théorème suivant [4] :

<u>Soit</u> $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ <u>un corps quadratique réel n'ayant pas d'unité de norme</u> - 1. <u>Soient</u> B <u>une classe d'idéaux de</u> K <u>dans le sens restreint et</u> $B^* = \Theta B$ (Θ = <u>classe de l'idéal</u> $(\sqrt{D})$) <u>la classe des idéaux équivalents à ceux de</u> B <u>dans le sens large mais pas dans le sens restreint</u>.

Alors :

$$\rho(B) - \rho(B^*) = \frac{\pi^2}{6} n$$

où $n \in \mathbb{Z}$; n peut être exprimé à l'aide des sommes de Dedekind.

Récemment, Hirzebruch a remarqué que la formule de Meyer s'exprime de façon élégante à l'aide des fractions continues. Pour B comme ci-dessus, on choisit un idéal fractionnaire $\mathfrak{A} \in B$ ayant une base $\{1, w\}$ telle que :

(4) $\qquad w > 1 \ , \quad 0 < w' < 1$

(w' le conjugué de w) ce qui est toujours possible. Un nombre quadratique w satisfaisant à (4) possède un développement en fraction continue purement périodique, c'est-à-dire :

$$(5) \qquad w = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 \ddots - \cfrac{1}{b_r - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ddots}}}}}$$

avec $b_1, \ldots, b_r$ des entiers ≥ 2. Un autre choix de $\mathfrak{A}$ ou de w mène à une permutation cyclique des nombres $b_1, \ldots, b_r$. En particulier, la longueur r de la période minimale de (5) ne dépend que de la classe B ; on la note $r = \ell(B)$. Alors le théorème de Meyer est équivalent à

$$(6) \qquad \rho(B) - \rho(B^*) = -\frac{\pi^2}{6} \left(\ell(B) - \ell(B^*) \right) .$$

(Pour plus des renseignements, voir [2] ou [5].)

Cette formule suggère que $\rho(B)$ lui-même est peut-être lié à la fraction continue (5). On ne peut pas s'attendre à avoir une formule aussi simple que (2), parce qu'il n'y a plus de choix canonique pour une base $\{1, w\}$ d'un idéal de B (dans le cas imaginaire, $w \in \mathcal{H}$ est déterminé à l'opération de $SL_2\mathbb{Z}$ près et peut donc être choisi de façon unique dans le domaine fondamental $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, w \leq \frac{1}{2}$, $|w| \geq 1$).

Au contraire, il y a $r = \ell(B)$ valeurs de $W \in K$ satisfaisant à (4), à savoir les nombres $w_1 = w, w_2, \dots, w_r$ obtenus de (5) en permutant $b_1, \dots, b_r$ cycliquement, et il n'y a pas de raison de préférer l'un des w_i aux autres. Il est donc naturel de supposer que $\rho(B)$ est la somme de $\ell(B)$ contributions qui sont données (comme en (2)) par une fonction universelle des w_i et leurs conjugués.

THEOREME : <u>Soient</u> K et B <u>comme ci-dessus et</u> $w_1, \dots, w_r$ <u>les nombres de K satisfaisant à</u> (14) <u>et tels que</u> $\{1, w_i\}$ <u>est une base d'un idéal fractionnaire de</u> B. <u>Alors</u> :

$$\rho(B) = \sum_{i=1}^{r} \phi(w_i, w_i'),$$

<u>où</u> $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>est une fonction différentiable indépendante de</u> B <u>ou de</u> K.

Explicitement, on a :

$$\phi(Z, Z') = F(Z) - F(Z') + Li_2\left(\frac{Z'}{Z}\right) - \frac{\pi^2}{6} + \operatorname{Log}\frac{Z}{Z'}\left(\gamma - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(Z - Z') + \frac{1}{4}\operatorname{Log}\frac{Z}{Z'}\right)$$

pour $0 < Z' < Z$, où

$$Li_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2} \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

est la fonction « dilogarithme » (voir [3]) et

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(nx)}{n} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \operatorname{Log}(1 - e^{-xt})\, dt$$

$\left(\nu(y) = \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \log y\right)$. Les fonctions $Li_2(t)$ et $F(x)$ sont <u>dessinées sur la page 21-05</u>.

Pour démontrer le théorème, on décompose $\zeta_B(s)$ en une somme de $r = \ell(B)$ séries de la forme :

$$Z(s) = (b^2 - 4ac)^{s/2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^s}$$

avec $am^2 + bmn + cn^2$ une forme quadratique indéfinie à coefficients positifs, et on montre que :

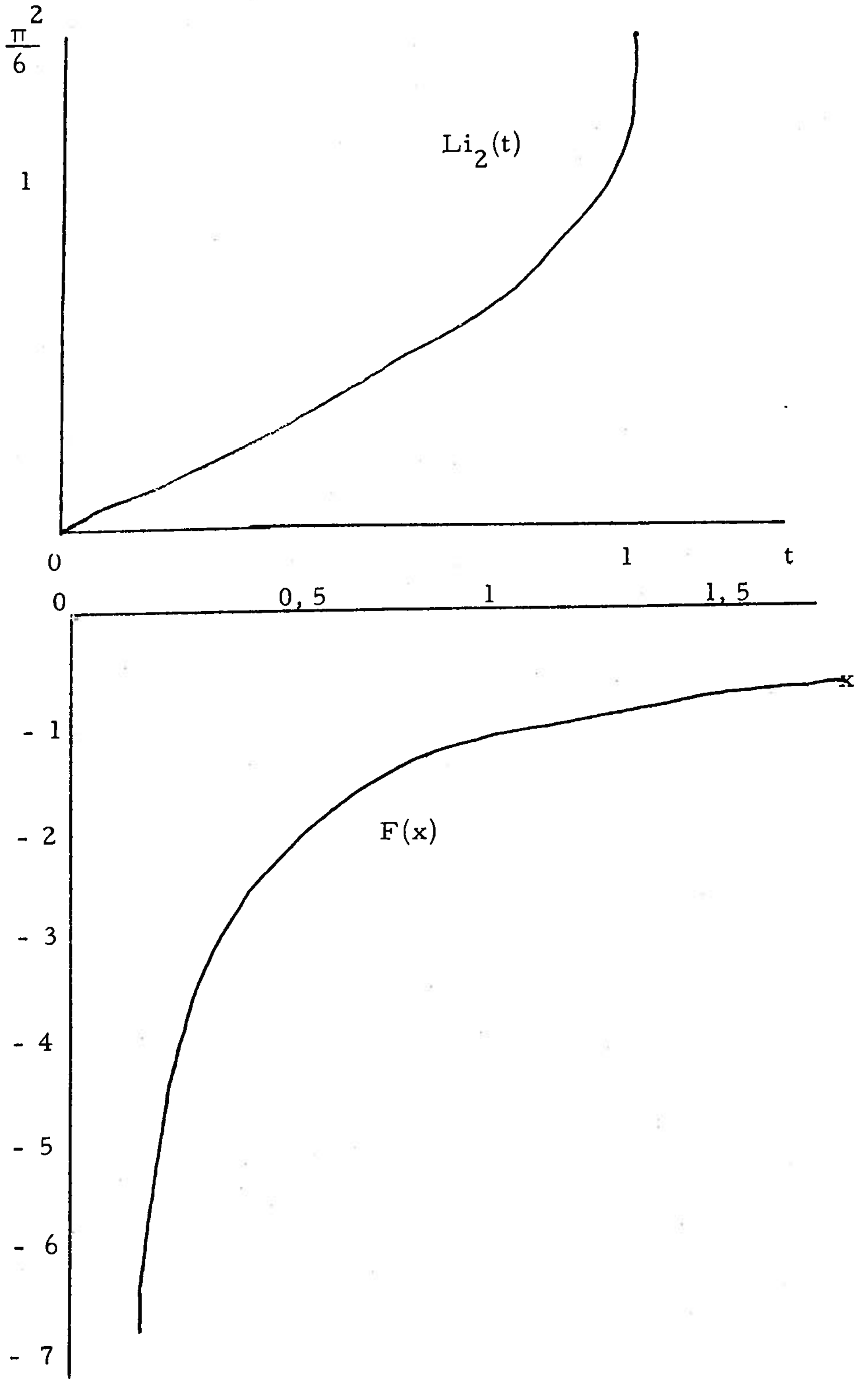
$$Z(s) = \frac{\alpha}{s-1} + \beta + O(s-1) \qquad (s \to 1)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{w}{w'}, \ \beta = \emptyset(w, w'),$$

$w' < w$ étant les deux racines de $cx^2 - bx + a = o$.

Les détails sont publiés en [6].



BIBLIOGRAPHIE

[1] HECKE, E : Uber die Kroneckersche Grenzformel für relle quadratische Körper und die Klassanzuhl relativ Abelscher Körper, Verhand d. Naturf. Gesell. i. Basel 28 (1917) 363-381, en Mathematische Werke, Vandenhoeck Ruprecht, Göttingen 1958, p. 199-217.

[2] HIRZEBRUCH F : and Zagier, D. : Class numbers, continued fractions and the Hilbert modular group, in preparation.

[3] LEWIN, L. : Dilogarithms and Associated Functions, Macdonald, London 1958.

[4] MEYER, C. : Die Berechnung der Klassenzahl Abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern, Akademie-Verlag, Berlin 1957.

[5] ZAGIER, D. : Class numbers and continued fractions, exposé aux Journées d'Arithmétiques, Bordeaux 1974, « Astérisque » à paraître.

[6] ZAGIER, D. : A Kronecker limit formula for real quadratic fields, Math. Annalen 213 (1975) - 153-184.

-:-:-:-

Mathematisches Institut
Universität Bonn
D-5300 BONN
Wegelerstrasse 10