THÉORIE DES NOMBRES. — *Formes modulaires à une et deux variables.* Note (*) de M. **Don Zagier**, transmise par M. Jean-Pierre Serre.

On construit une forme $\Omega(z_1, z_2; \tau)$, modulaire en z_1, z_2 pour le groupe modulaire de Hilbert de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ et en τ pour $\Gamma_0(p)$; c'est le « noyau » d'une correspondance entre formes en une et deux variables due à Doi et Naganuma.

1. Notations. — Soient $p \equiv 1 \pmod 4$ un nombre premier et k un entier pair > 2. On note $S_k(\Gamma_0(p), (\ /p))$, l'espace des formes paraboliques pour $\Gamma_0(p)$, de « Nebentypus » (au sens de Hecke) relativement au caractère de Legendre $(\ /p)$; si $f \in S_k(\Gamma_0(p), (\ /p))$, on a

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)(cz+d)^k f(z) \qquad (z \in \mathfrak{H} = \text{demiplan-supérieur})$$

pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$. On note $S_k(SL_2\,\mathcal{O})$, l'espace des formes paraboliques de poids k pour le groupe modulaire de Hilbert $SL_2\,\mathcal{O}$ [$\mathcal{O}$ = anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$]; si $f \in S_k(SL_2\,\mathcal{O})$, on a

$$f\left(\frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta}, \frac{\alpha' z_2+\beta'}{\gamma' z_2+\delta'}\right) = (\gamma z_1+\delta)^k(\gamma' z_2+\delta')^k f(z_1, z_2) \qquad (z_1, z_2 \in \mathfrak{H})$$

pour toute matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2\,\mathcal{O}$, $\alpha', \ldots, \delta'$ étant les conjugués sur $\mathbf{Q}$ de $\alpha, \ldots, \delta$.

2. La forme Ω. — Pour tout entier $m \geqq 0$, on pose

$$\omega_m(z_1, z_2) = \sum_{\lambda\lambda'-ab=m/p}' \frac{1}{(az_1 z_2+\lambda z_1+\lambda' z_2+b)^k},$$

où la sommation porte sur les $a, b \in \mathbf{Z}$, $\lambda \in \mathfrak{d}^{-1}$ [où $\mathfrak{d}$ est la différente de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$] avec $N(\lambda\sqrt{p})+abp = -m$ et le $\sum'$ signifie que les valeurs $a = b = 0$ doivent être omises dans le cas $m = 0$. La série converge absolument pour $k > 2$ et définit alors une forme modulaire de poids k pour $SL_2\,\mathcal{O}$. La forme ω_0 est un multiple de la série de Hecke-Eisenstein de poids k, tandis que, pour $m > 0$, ω_m est une forme parabolique. On a $\omega_m = 0$ si $(m/p) = -1$, puisque la sommation est vide dans ce cas.

Théorème 1. — *Pour tout point $(z_1, z_2) \in \mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, la suite de nombres $\{m^{k-1}\omega_m(z_1, z_2)\}_{m\geqq 1}$ est la suite des coefficients de Fourier d'une forme parabolique appartenant à $S_k(\Gamma_0(p), (\ /p))$.*

Posons

$$\Omega(z_1, z_2; \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1}\omega_m(z_1, z_2)\, e^{2\pi i m\tau} \qquad (\tau \in \mathfrak{H}).$$

Pour τ fixé, la fonction $(z_1, z_2) \mapsto \Omega(z_1, z_2; \tau)$ appartient à $S_k(SL_2\,\mathcal{O})$; pour z_1, z_2 fixés, la fonction $\tau \mapsto \Omega(z_1, z_2; \tau)$ appartient à $S_k(\Gamma_0(p), (\ /p))$.

3. Expression de Ω a l'aide des séries de Poincaré. — Rappelons maintenant la définition des séries de Poincaré pour $\Gamma_0(p)$. Pour tout entier $n > 0$, soit

$$G_n^{(\infty)}(z) = \frac{1}{2} \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in U \setminus \Gamma_0(p)} \left(\frac{a}{p}\right)(cz+d)^{-k} e^{2\pi i n[(az+b)/(cz+d)]} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $G_n^{(\infty)} \in S_k(\Gamma_0(p), (\ /p))$ et, pour une forme modulaire

$$f = \sum a_n e^{2\pi i n \tau} \in S_k\left(\Gamma_0(p), \left(\frac{}{p}\right)\right)$$

quelconque, le produit de Petersson de f et $G_n^{(\infty)}$ est donné par

$$(f, G_n^{(\infty)}) = (k-2)!(4\pi n)^{1-k} a_n.$$

La forme

$$G_n^{(0)} = G_n^{(\infty)} \Big| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \in S_k\left(\Gamma_0(p), \left(\frac{}{p}\right)\right)$$

donne, de façon analogue, les coefficients du développement de Fourier à l'autre pointe 0 de $\Gamma_0(p)$. Posons

$$G_n(z) = G_n^{(\infty)}(z) + \sqrt{p}\, G_{n/p}^{(0)}(z) = G_n^{(\infty)}(z) + p^{(1/2-k)} z^{-k} G_{n/p}^{(\infty)}\left(\frac{-1}{pz}\right),$$

où le deuxième terme est 0 si $p \nmid n$.

Soit ω_m^0 la fonction de z_1, z_2 définie par la même équation que celle donnant ω_m, mais avec la sommation restreinte à $a = 0$:

$$\omega_m^0(z_1, z_2) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \\ \lambda\lambda' = m/p}} \sum_{b \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(\lambda z_1 + \lambda' z_2 + b)^k}.$$

(Noter que $\omega_m = 0$ si m n'est pas une norme.) Cette fonction a de bonnes propriétés de transformation par rapport au groupe d'isotropie de la pointe à l'infini, c'est-à-dire par rapport aux translations par les éléments de $\mathcal{O}$ et aux multiplications par des unités totalement positives de $\mathcal{O}$.

Théorème 2. — *On a*

$$\Omega(z_1, z_2; \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} \omega_m^0(z_1, z_2) G_m(\tau).$$

Pour démontrer cette identité, on développe le membre de gauche en série de Fourier :

$$\sum a_{n\nu} e(n\tau + \nu z_1 + \nu' z_2),$$

où n parcourt les entiers $\geqq 1$ et ν les éléments totalement positifs de $\mathfrak{d}^{-1}$. Chaque coefficient est donné par une série de la forme

$$a_{n\nu} = a_{n\nu 0} + \sum_{r=1}^{\infty} a_{n\nu r} J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{r}\sqrt{\frac{n\nu\nu'}{p}}\right),$$

où $a_{n\nu r}$ est une certaine somme exponentielle finie (analogue à une somme de Kloosterman) et J_{k-1} la fonction de Bessel d'indice $k-1$. Le membre de droite a un développement analogue avec des coefficients $b_{n\nu}$ et $b_{n\nu r}$, et un calcul explicite montre que $b_{n\nu r} = a_{n\nu r}$, d'où le théorème.

On notera que le théorème 2 entraîne le théorème 1, puisque les G_m appartiennent à $S_k(\Gamma_0(p), (\ /p))$.

COROLLAIRE. — *Soit* $f \in S_k(\Gamma_0(p), (\ /p))$ *et soient*

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}, \qquad p^{-k/2}\tau^{-k} f\left(\frac{-1}{p\tau}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n\tau},$$

les développements de Fourier de f *aux deux pointes* ∞ *et* 0 *de* $\Gamma_0(p)$. *Alors la fonction* $\iota(f)$ *de deux variables définie par*

$$\iota(f)(z_1, z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n^0(z_1, z_2) + p^{(k-1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_{np}^0(z_1, z_2)$$

appartient à $S_k(SL_2\,\mathcal{O})$.

En effet, $\iota(f)$ n'est autre que le produit de Petersson de $f(\tau)$ et de $\Omega(z_1, z_2; \tau)$ par rapport à la variable τ, et le corollaire résulte du fait que Ω est une forme modulaire de Hilbert en (z_1, z_2).

4. INTERPRÉTATION DE Ω COMME « NOYAU ». — Soient

$$f = \sum a_n e(n\tau) \in S_k\left(\Gamma_0(p), \left(\frac{}{p}\right)\right)$$

une fonction propre normalisée des opérateurs de Hecke et

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \prod_q \left(1 - a_q q^{-s} + \left(\frac{q}{p}\right) q^{k-1-2s}\right)^{-1}$$

sa transformée de Mellin. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}$, posons

$$c_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} a_q & \text{si } \mathfrak{q}\mathfrak{q}' = (q), \quad \left(\dfrac{q}{p}\right) = 1, \\ a_q^2 + 2q^{k-1} & \text{si } \mathfrak{q} = (q), \quad \left(\dfrac{q}{p}\right) = -1, \\ a_p + \bar{a}_p & \text{si } \mathfrak{q}^2 = (p). \end{cases}$$

On sait ([1]) que la fonction

$$\tilde{\varphi}(s) = \prod_{\mathfrak{q}} (1 - c_{\mathfrak{q}} N(\mathfrak{q})^{-s} + N(\mathfrak{q})^{k-1-2s})^{-1}$$

est la transformée de Mellin d'une forme parabolique $\tilde{f}(z_1, z_2)$ de poids k pour le groupe modulaire de Hilbert. [Noter que $\tilde{\varphi} = \varphi\varphi^\rho$, où $\varphi^\rho(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n n^{-s}$.] Puisque les fonctions propres normalisées des opérateurs de Hecke forment une base $B_{k,p}$ de

$S_k(\Gamma_0(p), (\,/p))$, l'application $f \mapsto \tilde{f}$ s'étend par linéarité en une application de cet espace dans $S_k(SL_2\,\mathcal{O})$. Cette application est (à un facteur près l'application ι définie du corollaire au théorème 2. Plus précisément :

THÉORÈME 3. — *On a*

$$\iota(f) = \frac{(2\pi i)^k p^{-k/2}}{(k-1)!}\tilde{f} \quad \textit{pour tout } f \in S_k\left(\Gamma_0(p), \left(\frac{\ }{p}\right)\right).$$

On étend par linéarité l'application $\sum a_n q^n \mapsto \sum \bar{a}_n q^n$ définie sur la base $B_{k,p}$ de $S_k(\Gamma_0(p), (\,/p))$ en une involution ρ de cet espace; si

$$f = \sum a_n q^n \in S_k\left(\Gamma_0(p), \left(\frac{\ }{p}\right)\right) \qquad \text{et} \qquad f^\rho = \sum a_n^\rho q^n,$$

on a

$$a_n^\rho = \left(\frac{n}{p}\right) a_n \qquad \text{si} \quad p \nmid n.$$

On décompose $S_k(\Gamma_0(p), (\,/p))$ en $S_k^+ \oplus S_k^-$ d'après les valeurs propres ± 1 de ρ; on a $\dim S_k^+ = \dim S_k^-$. La fonction $G_n(z)$ appartient par construction à S_k^+ si $(n/p) \neq -1$, et il s'ensuit que $\Omega(z_1, z_2; \tau)$ appartient à S_k^+ en tant que fonction de τ. L'application ι est nulle sur S_k^- et injective sur S_k^+.

(*) Séance du 1er juillet 1974.

(1) Ceci a été démontré dans le cas des formes de « Haupttypus » par K. DOI et H. NAGANUMA, *Invent. Math.*, 9, 1969, p. 1-14 et dans le cas de « Nebentypus » par H. NAGANUMA, *J. Math. Soc. Japan*, 25, 1973, p. 547-555. Deligne me signale qu'il se trouve aussi (sous une autre forme) dans H. JACQUET, *Automorphic Forms on* GL (2). II, Springer, Berlin, 1972, théorème 20.6.

Institut des Hautes Études Scientifiques,
35, *rue de Chartres,*
91440 *Bures-sur-Yvette.*