素数定理的一个简单证明*)

——介绍Korevaar的工作——

D.Zagier

我现在向大家介绍近来Korevaar所给出的素数定理的一个简单证明．令

$$\pi(x)=\#\{p \mid p\leqslant x\},$$

素数定理是说：$\pi(x)\sim x/\log x$ （$x\to\infty$时），这里（和以后）log 均指自然对数．令

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & \text{如果 } n=p^r,\ r\geqslant 1,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n).$$

引理1 由$\psi(x)\sim x$（$x\to\infty$时）可推出素数定理．

证 （参见华罗庚著《数论导引》第九章定理1）．首先有

$$\psi(x)\leqslant\sum_{p\leqslant x}\frac{\log x}{\log p}\log p=\pi(x)\log x, \tag{1}$$

从而 $\varliminf_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)}{x/\log x}\geqslant\lim_{x\to\infty}\dfrac{\psi(x)}{x}=1$．另一方面，对于$0<\alpha<1$，$x>1$，我们有

$$\psi(x)\geqslant\sum_{x^\alpha<p\leqslant x}\log p\geqslant\{\pi(x)-\pi(x^\alpha)\}\log x^\alpha\geqslant\alpha(\pi(x)-x^\alpha)\log x,$$

从而

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}\leqslant\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha\log x}{x}=\frac{1}{\alpha}.$$

令$\alpha\to 1$，于是 $\varlimsup_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)}{x/\log x}\leqslant 1$．将两者合并即得素数定理．

引理2 $\psi(x)=O(x)$

证 首先我们有

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)}<\prod_{n<p\leqslant 2n}p\leqslant\binom{2n}{n}\leqslant(1+1)^{2n}=4^n.$$

从而$\pi(2n)-\pi(n)\leqslant n\log 4/\log n$．特别取$n=2^k$，则有

$$\pi(2^{k+1})-\pi(2^k)\leqslant 2^{k+1}/k$$

---

* 这是D.Zagier教授于1982年3月24日在应用数学研究所的演讲．

但是，易知$\pi(2^{k+1})\leqslant 2^k$，从而

$$(k+1)\pi(2^{k+1})-k\pi(2^k)\leqslant\pi(2^{k+1})+k(\pi(2^{k+1})-\pi(2^k))\leqslant 2^k+2^{k+1}=3\cdot 2^k$$

在上式中取 $k=0,1,\cdots,l$ 然后相加，即得

$$(l+1)\pi(2^{l+1})\leqslant 3(2^0+2^1+\cdots+2^l)<3\cdot 2^{l+1}$$

即$\pi(2^{l+1})<3\cdot 2^{l+1}/_{l+1}$。对于任意$x\geqslant 2$，令$2^l\leqslant x<2^{l+1}$，则

$$\pi(x)<\pi(2^{l+1})<3\cdot 2^{l+1}/l+1\leqslant 6x/(\log x/\log 2)=x\log 64/\log x.$$

最后由引理 1 证明中的(1)式即得本引理。

引理3 如果$\int_1^{\infty}\frac{\phi(t)-t}{t^2}dt$收敛，则$\phi(x)\sim x$（当$x\to\infty$时）。

证 用反证法．假如$\frac{\phi(x)}{x}\not\to 1$，则或者存在$c>1$，和$x_n\to+\infty$，使得$\phi(x_n)\geqslant cx_n$ $(n=1,2,\cdots)$；或者存在$c<1$和$x_n\to+\infty$，使得$\phi(x_n)\leqslant cx_n(n=1,2,\cdots)$。对于第一种情形，由于$\phi(x)$是递增函数，从而

$$\int_{x_n}^{cx_n}\frac{\phi(t)-t}{t^2}\,dt\geqslant\int_{x_n}^{cx_n}\frac{cx_n-t}{t^2}\,dt=(c-1)-\log c>0$$

此式对于$n=1,2,\cdots$均成立。这就与$\int_1^{\infty}\frac{\phi(t)-t}{t^2}dt$收敛的假设相矛盾。类似地，对于第二种情形，我们有

$$\int_{cx_n}^{x_n}\frac{\phi(t)-t}{t^2}dt\leqslant\int_{cx_n}^{x_n}\frac{cx_n-t}{t^2}dt=1-c+\log c<0\quad(n=1,2,\cdots),$$

这同样导致矛盾。

引理4 令$\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}(\mathrm{Re}\,(s)>1)$.则$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$在$\mathrm{Re}\,(s)>0$中解析。

引理5 当$t\neq 0$时，$\zeta(1+it)\neq 0$。

以上二引理的证明参见《数论导引》第236—238页，此处从略。

引理6 $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=s\int_1^{\infty}\frac{\phi(t)}{t^{s+1}}dt\qquad(\mathrm{Re}\,(s)>1$时)

证 由于$\zeta(s)=\prod\limits_p(1-p^{-s})^{-1}$，从而

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_p p^{-s}\log p/(1-p^{-s})=\sum_{p,r}\frac{\log p}{p^{rs}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

另一方面

$$\int_1^{\infty}\frac{\phi(t)dt}{t^{s+1}}=\int_1^{\infty}\sum_{n\leqslant t}\Lambda(n)\frac{dt}{t^{s+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\int_n^{\infty}\frac{dt}{t^{s+1}}=s^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

将两式合在一起即得引理。

现在叙述我们的主要工具：分析引理，它相当于某种Tauber型定理。