

素数定理的一个简单证明^{*}

——介绍Korevaar的工作——

D. Zagier

我现在向大家介绍近来Korevaar所给出的素数定理的一个简单证明。令

$$\pi(x) = \#\{p \mid p \leq x\},$$

素数定理是说: $\pi(x) \sim x/\log x$ ($x \rightarrow \infty$ 时), 这里(和以后) \log 均指自然对数。令

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{如果 } n = p^r, r \geq 1, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

$$\phi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

引理1 由 $\phi(x) \sim x$ ($x \rightarrow \infty$ 时) 可推出素数定理。

证 (参见华罗庚著《数论导引》第九章定理1)。首先有

$$\phi(x) \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \pi(x) \log x, \quad (1)$$

从而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x} = 1$ 。另一方面, 对于 $0 < \alpha < 1$, $x > 1$, 我们有

$$\phi(x) \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \log p \geq \{\pi(x) - \pi(x^\alpha)\} \log x^\alpha \geq \alpha(\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \log x,$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha \log x}{x} = \frac{1}{\alpha}.$$

令 $\alpha \rightarrow 1$, 于是 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq 1$ 。将两者合并即得素数定理。

引理2 $\phi(x) = O(x)$

证 首先我们有

$$n^{\pi(2n) - \pi(n)} < \prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 4^n.$$

从而 $\pi(2n) - \pi(n) \leq n \log 4 / \log n$ 。特别取 $n = 2^k$, 则有

$$\pi(2^{k+1}) - \pi(2^k) \leq 2^{k+1}/k$$

* 这是D. Zagier教授于1982年3月24日在应用数学研究所的演讲。

但是, 易知 $\pi(2^{k+1}) \leq 2^k$, 从而

$$(k+1)\pi(2^{k+1}) - k\pi(2^k) \leq \pi(2^{k+1}) + k(\pi(2^{k+1}) - \pi(2^k)) \leq 2^k + 2^{k+1} = 3 \cdot 2^k$$

在上式中取 $k=0, 1, \dots, l$ 然后相加, 即得

$$(l+1)\pi(2^{l+1}) \leq 3(2^0 + 2^1 + \dots + 2^l) < 3 \cdot 2^{l+1}$$

即 $\pi(2^{l+1}) < 3 \cdot 2^{l+1} / (l+1)$. 对于任意 $x \geq 2$, 令 $2^l \leq x < 2^{l+1}$, 则

$$\pi(x) < \pi(2^{l+1}) < 3 \cdot 2^{l+1} / (l+1) \leq 6x / (\log x / \log 2) = x \log 64 / \log x.$$

最后由引理 1 证明中的(1)式即得本引理.

引理 3 如果 $\int_1^\infty \frac{\phi(t) - t}{t^2} dt$ 收敛, 则 $\phi(x) \sim x$ (当 $x \rightarrow \infty$ 时).

证 用反证法. 假如 $\frac{\phi(x)}{x} \not\rightarrow 1$, 则或者存在 $c > 1$, 和 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $\phi(x_n) \geq cx_n$ ($n=1, 2, \dots$); 或者存在 $c < 1$ 和 $x_n \rightarrow +\infty$, 使得 $\phi(x_n) \leq cx_n$ ($n=1, 2, \dots$). 对于第一种情形, 由于 $\phi(x)$ 是递增函数, 从而

$$\int_{x_n}^{cx_n} \frac{\phi(t) - t}{t^2} dt \geq \int_{x_n}^{cx_n} \frac{cx_n - t}{t^2} dt = (c-1) - \log c > 0$$

此式对于 $n=1, 2, \dots$ 均成立. 这就与 $\int_1^\infty \frac{\phi(t) - t}{t^2} dt$ 收敛的假设相矛盾. 类似地, 对于第二种情形, 我们有

$$\int_{cx_n}^{x_n} \frac{\phi(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{cx_n}^{x_n} \frac{cx_n - t}{t^2} dt = 1 - c + \log c < 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

这同样导致矛盾.

引理 4 令 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ ($\text{Re}(s) > 1$). 则 $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ 在 $\text{Re}(s) > 0$ 中解析.

引理 5 当 $t \neq 0$ 时, $\zeta(1+it) \neq 0$.

以上二引理的证明参见《数论导引》第 236—238 页, 此处从略.

引理 6 $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\phi(t)}{t^{s+1}} dt$ ($\text{Re}(s) > 1$ 时)

证 由于 $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$, 从而

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p p^{-s} \log p / (1 - p^{-s}) = \sum_{p, r} \frac{\log p}{p^{r/s}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

另一方面

$$\int_1^\infty \frac{\phi(t) dt}{t^{s+1}} = \int_1^\infty \sum_{n \leq t} \Lambda(n) \frac{dt}{t^{s+1}} = \sum_{n=1}^\infty \Lambda(n) \int_n^\infty \frac{dt}{t^{s+1}} = s^{-1} \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

将两式合在一起即得引理.

现在叙述我们的主要工具: 分析引理, 它相当于某种 Tauber 型定理.

