ÜBERLAGERUNGEN UND FUNDAMENTALGRUPPE

WERNER BALLMANN

1. Einleitung

In diesem Skriptum sammle ich einige elementare Dinge aus der Topologie, die ich in meinen Vorlesungen zur Differentialgeometrie in der Regel voraussetze. Als weiterführende Literatur empfehle ich [Ha] und [Sp].

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1
2. Voraussetzungen und Konventionen 2
3. Fundamentalgruppe 2
3.1. Erste Homotopiegruppe 3
3.2. Fundamentalgruppoid 5
3.3. Wegeräume 7
4. Überlagerungen 8
4.1. Lifte 8
4.2. Existenz von Überlagerungen 12
4.3. Eindeutigkeit von Überlagerungen 13
4.4. Gruppenwirkungen 16
Danksagungen 16
Literatur 16

19.03.03 / Letzte Verbesserungen: 19.03.03.

2. Voraussetzungen und Konventionen

Ich setze die folgenden Begriffe aus der mengentheoretischen Topologie voraus:
1) Topologie, Basis einer Topologie, Hausdorff-Axiom, Metrik.
2) Stetigkeit, Homöomorphismus, Lipschitz-Abbildung.
3) Kompakt, folgenkompakt.
4) Zusammenhängend, wegzusammenghängend.

Mit $I = [0, 1]$ bezeichne ich das Einheitsintervall. Das grundlegende Resultat der mengentheoretischen Topologie besagt, dass I zusammenhängend ist. Ich benütze einige weitere elementare Resultate aus der mengentheoretischen Topologie, die Beweise sind empfohlene Gymnastik mit den entsprechenden Definitionen. Bei Bedarf greife der Leser auf die lesbare Quelle [Qu] zurück.

Um nicht langatmig zu werden, setze ich in meinen Aussagen offensichtliche Annahmen stillschweigend voraus. Zum Beispiel spreche ich von stetigen Abbildungen, ohne explizit vorauszusetzen, dass Definitions- und Wertebereich topologische Räume sind. Ich betrachte Teilmengen topologischer Räume immer mit der induzierten Topologie.

3. Fundamentalgruppe

Seien X und Y topologische Räume, $A \subset X$ und $f_0, f_1 : X \to Y$ stetige Abbildungen. Eine *Homotopie* von f_0 nach f_1 $\operatorname{rel} A$ ist eine stetige Abbildung $H : I \times X \to Y$ mit $H(0, \cdot) = f_0$, $H(1, \cdot) = f_1$ und $H(s, x) = f_0(x)$ für alle $x \in A$ und $s \in I$. Falls es eine solche Homotopie von f_0 nach f_1 gibt, so heissen f_0 und f_1 *homotop* $\operatorname{rel} A$. Falls f_0 und f_1 homotop $\operatorname{rel} A$ sind, so ist insbesondere $f_0(x) = f_1(x)$ für alle $x \in A$.

Falls $A = \emptyset$ ist, so lassen wir die Referenz auf A weg und sprechen von einer Homotopie beziehungsweise von homotopen Abbildungen. Falls die Identität von X homotop zu einer konstanten Abbildung ist, so heisst X *kontrahierbar*. Eine entsprechende Homotopie nennen wir *Kontraktion*.

3.1. Beispiele. 1) Seien $f_0, f_1 : X \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Dann definiert $H = H(s, t) := (1 - s)f_0(x) + sf_1(x)$ eine Homotopie von f_0 nach f_1. Falls noch $f_0(x) = f_1(x)$ für alle x in einer Teilmenge $A \subset X$ ist, so ist H eine Homotopie von f_0 nach f_1 $\operatorname{rel} A$. Der Punkt ist hier, dass die parametrisierten Strecken $s \mapsto (1 - s)y + sz$, $0 \le s \le 1$, zwischen $y, z \in \mathbb{R}^n$ stetig in (s, y, z) sind.
2) $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar: Für $x \in \mathbb{R}^n$ definiert $K : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K(s, y) := sx + (1 - s)y$, eine Kontraktion. Diese Homotopie lässt den Punkt x fest, $H(s, x) = x$ für alle $s \in I$. Dieselbe Abbildung liefert eine Kontraktion für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die sternförmig bezüglich x sind.
3) Sei $x \in S^n$. Dann ist $S^n \setminus \{x\}$ kontrahierbar: Sei nämlich $h : S^n \setminus \{x\} \to \mathbb{R}^n$ ein Homoöomorphismus, zum Beispiel die entsprechende stereographische Projektion. Für $y \in S^n \setminus \{x\}$ definiert dann $K : S^n \setminus \{x\} \to S^n \setminus \{x\}$, $K(s, z) := h^{-1}(sh(y) + (1 - s)h(z))$, eine Kontraktion. Diese lässt den Punkt y fest.

3.2. Lemma. *Seien X, Y, Z topologische Räume, $A \subset X$ und $B \subset Y$.*
1) Homotopie $\operatorname{rel} A$ *definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y.*
2) Seien $f_0, f_1 : X \to Y$ homotop $\operatorname{rel} A$ *und $g_0, g_1 : Y \to Z$ homotop* $\operatorname{rel} B$. *Falls dann $f_0(A) \subset B$ ist, so sind $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$ homotop* $\operatorname{rel} A$.

Beweis. Offensichtlich definiert $H(s,x) = f(x)$ eine Homotopie von f nach f $\operatorname{rel} A$. Falls $H = H(s,x)$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 $\operatorname{rel} A$ ist, so definert $H'(s,x) = H(1-s,x)$ eine Homotopie von f_1 nach f_0 $\operatorname{rel} A$. Falls H_0 eine Homotopie von f_0 nach f_1 $\operatorname{rel} A$ und H_1 eine Homotopie von f_1 nach f_2 $\operatorname{rel} A$ ist, so ist

$$H = H(s,x) = \begin{cases} H_0(2s,x) & \text{falls } s \leq 1/2, \\ H_1(2s-1,x) & \text{falls } s \geq 1/2, \end{cases}$$

eine Homotopie von f_0 nach $f_2 \mod A$. Damit folgt die erste Behauptung.

Falls $H = H(s,x)$ eine Homotopie von f_0 nach f_1 $\operatorname{rel} A$ ist und $H' = H'(s,y)$ eine Homotopie von g_0 nach g_1 $\operatorname{rel} B$, so definiert $H''(s,x) = H'(s, H(s,x))$ eine Homotopie von $g_0 \circ f_0$ nach $g_1 \circ f_1$ $\operatorname{rel} A$. □

3.1. **Erste Homotopiegruppe.** Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildung $c : I \to X$. Wir nennen $x = c(0)$ den *Anfangs*- und $y = c(1)$ den *Endpunkt* von c und sagen, dass c die Punkte x und y verbindet. Wir nennen X *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg von x nach y gibt.

Seien c_0, c_1 Wege in X von p nach q. Eine *eigentliche Homotopie* von c_0 nach c_1 ist eine Homotopie von c_0 nach c_1 $\operatorname{rel}\{0,1\}$, dass heisst, H ist eine Homotopie von c_0 nach c_1 und es gilt $H(s,0) = c_0(0)$ und $H(s,1) = c_0(1)$ für alle $s \in I$. Mit anderen Worten, wir halten die Endpunkte der Wege fest. Wir nennen dann c_0 und c_1 *eigentlich homotop* und schreiben $c_0 \sim c_1 \operatorname{rel}\{0,1\}$.

3.3. Lemma. *Für einen Weg c in X sei $c^{-1} = c^{-1}(t) := c(1-t)$ der* inverse Weg. *Falls dann c_0, c_1 eigentlich homotop sind, so auch c_0^{-1} und c_1^{-1}.* □

Für Wege c und c' in X mit $c(1) = c'(0)$ definieren wir die *Zusammensetzung* $c * c' : I \to X$ wie folgt:

$$(c * c')(t) := \begin{cases} c(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ c(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

3.5. Lemma. *1) Falls c_0, c_1 und c_0', c_1' jeweils eigentlich homotop sind mit $c_0(1) = c_0'(0)$, so sind auch $c_0 * c_0'$ und $c_1 * c_1'$ eigentlich homotop.*
2) Falls c, c', c'' Wege in X sind mit $c(1) = c'(0)$ und $c'(1) = c''(0)$, so sind $(c * c') * c''$ und $c * (c' * c'')$ eigentlich homotop.
3) Mit x sei der konstante Weg mit Wert $x \in X$ bezeichnet. Für einen Weg c in X mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$ sind dann $x * c$ und $c * y$ eigentlich homotop zu c.
4) Für einen Weg c in X ist $c * c^{-1}$ eigentlich homotop zum konstanten Weg im Anfangspunkt $c(0)$.

Beweis. 1) Seien H und H' eigentliche Homotopien von c_0 nach c_1 und c_0' nach c_1'. Dann ist

$$(H * H')(s,t) := \begin{cases} H(s,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ H(s,2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

eine eigentliche Homotopie von $c_0 * c_0'$ nach $c_1 * c_1'$.
2) Eine eigentliche Homotopie H von $(c * c') * c''$ nach $c * (c' * c'')$ ist

$$H(s,t) := \begin{cases} c(4t - 2st) & 0 \le t \le \frac{1+s}{4}, \\ c'(4t - s - 1) & \frac{1+s}{4} \le t \le \frac{2+s}{4}, \\ c''(2t - 2s + 2st - 1) & \frac{2+s}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

3) Eine eigentliche Homotopie H von $x * c$ nach c ist

$$H(s,t) := \begin{cases} c(st) & 0 \le t \le \frac{1-s}{2}, \\ c(2t + s - st - 1) & \frac{1-s}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Der Beweis des zweiten Teils der dritten und der vierten Behauptung ist ähnlich und bleibt als Übung für den Leser. □

Eine *Schleife* in $x \in X$ ist ein Weg, der in x startet und endet. Die Menge der eigentlichen Homotopieklassen von Schleifen in x bezeichnen wir mit $\pi_1(X,x)$. Aus Lemma 3.5 folgt, dass die Abbildungen i und $*$ eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(X,x)$ induzieren. Zusammen mit dieser Struktur nennen wir $\pi_1(X,x)$ die *erste Homotopiegruppe* von X *mit Basispunkt* x.

Das neutrale Element in $\pi_1(X,x)$ wird repräsentiert durch die Schleifen in x, die eigenlich homotop zur konstanten Schleife x sind. Eine eigentliche Homotopie einer Schleife c in x zur Punktkurve x nennen wir auch eine *Nullhomotopie* von c und sagen, dass c *nullhomotop* ist.

Ein *punktierter topologischer Raum* ist ein topologischer Raum X zusammen mit einem ausgewählten Punkt $x \in X$. Einem punktierten topologischen Raum (X,x) ordnen wir die erste Homotopiegruppe $\pi_1(X,x)$ zu. Diese Zuordnungsvorschrift definiert eine Art Abbildung, ausser das Definitions- und Wertebereich, punktierte topologische Räume bzw. Gruppen, keine Mengen sind. Aus diesem Grund sprechen wir von einem *Funktor*. Zu einem anständigen Funktor gehört auch eine ordentliche Regel für Abbildungen zwischen den Objekten, die untersucht werden, hier also topologische Räume und Homomorphismen von Gruppen.

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Nach Lemmas 3.2 und 3.5 induziert f dann einen Homomorphismus $f_\# : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$.

3.6. Lemma. *1)* $(\mathrm{id}_X)_\#$ *ist die identische Abbildung von* $\pi_1(X,x)$.
2) Für die Komposition stetiger Abbildungen gilt $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$. □

Falls f ein Homöomorphismus ist und $g := f^{-1}$, so ist also $g_\# = (f_\#)^{-1}$. Um eine stärkere Aussage formulieren zu können, brauchen wir noch weitere Definitionen.

Seien (X, x) und (Y, y) punktierte topologische Räume. Wir betrachten stetige Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(x) = y$. Wir schreiben dies als $f : (X, x) \to (Y, y)$.

Zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 : (X, x) \to (Y, y)$ nennen wir *homotop*, wenn sie als Abbildungen zwischen X und Y homotop rel$\{x\}$ sind. Eine stetige Abbildung $f : (X, x) \to (Y, y)$ nennen wir *Homotopieäquivalenz*, falls es eine stetige Abbildung $g : (Y, y) \to (X, x)$ gibt, so dass $g \circ f$ homotop zu id_X rel$\{x\}$ und $f \circ g$ homotop zu id_Y rel$\{y\}$ ist. Offensichtlich ist ein Homöomorphismus zwischen punktierten topologischen Räumen eine Homotopieäquivalenz.

3.7. Korollar. *Falls $f : (X, x) \to (Y, y)$ eine Homotopieäquivalenz ist, so ist $f_\# : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ ein Isomorphismus.* $\square$

Dieses Korollar zeigt, dass es wichtig ist, die erste Homotopiegruppe zu berechnen.

3.8. Beispiele. 1) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Mit der Homotopie aus Beispiel 3.1.1 folgt, dass jede Schleife in x eigentlich homotop zur Punktkurve x ist. Damit ist $\pi_1(\mathbb{R}^n, x)$ trivial. Mit demselben Argument folgt $\pi_1(X, x) = \{1\}$, falls $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich x ist.
2] Für $n \geq 2$ und $x \in S^n$ ist $\pi_1(S^n, x) = \{1\}$: Sei $R : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ die radiale Projektion, $R(x) = x/|x|$. Sei $c : I \to S^n$ eine Schleife in $x \in S^n$. Dann gibt es ein $k > 0$ mit $|c(t) - c(t')| < 1$ für alle $t, t' \in I$ mit $|t - t'| < 1/k$. Wir parametrisieren den Grosskreisbogen c_i von $c((i-1)/k)$ nach $c(i/k)$ mit

$$[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}] \ni t \mapsto R\big\{(i - kt)c\big(\frac{i-1}{k}\big) + (kt - i + 1)c\big(\frac{i}{k}\big)\big\}$$

und definieren eine Schleife $c' : I \to S^n$ durch $c'(t) := c_i(t)$, $(i-1)/k \leq t \leq i/k$. Die Dreiecksungleichung impliziert $|c(t) - c_i(t)| < 2$ für alle $t \in [t_{i-1}, t_i|$. Daher sind c und c' eigentlich homotop, zum Beispiel ist $H(s, t) = R\{(1-s)c(t) + sc'(t)\}$ eine eigentliche Homotopie von c nach c'. Das Bild von c' besteht aus endlich vielen Grosskreisbögen, und $n \geq 2$. Also ist c' nicht surjektiv auf S^n. Sei $y \in S^n$ ein Punkt ausserhalb des Bildes von c'. Dann liefert die Homotopie aus Beispiel 3.1.3 (nach Rollentausch) eine eigentliche Homotopie von c' zur Punktkurve x in $S^n \setminus \{y\}$. Diese ist natürlich auch eine eigentliche Homotopie von c' zur Punktkurve in der Obermenge S^n. Insgesamt folgt, dass c eigentlich homotop zur Punktkurve ist, also ist $\pi_1(S^n, x) = \{1\}$.

In jedem unserer Beispiele in 3.8 verschwindet die erste Homotopiegruppe. Der Grund ist einfach: Uns fehlt soweit eine geeignete Methode, kompliziertere Beispiele zu behandeln.

3.2. **Fundamentalgruppoid.** Seien $x_0, x_1 \in X$ und c eine Weg von x_0 nach x_1. Falls c' eine Schleife in x_1 ist, so nennen wir $c * c' * c^{-1}$ ein *Lasso* in x_0, genauer ein c-Lasso in x_0. Falls c' und c'' eigentlich homotope Schleifen in x_1 sind, so sind die entsprechenden Lassos $c * c' * c^{-1}$ und $c * c'' * c^{-1}$ nach Lemma 3.5

ebenfalls eigentlich homotop. Damit ist die Abbildung $i_c : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$, $[c'] \mapsto [c * c' * c^{-1}]$, wohldefiniert.

3.9. SATZ. *Die Abbildung $i_c : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ ist ein Isomorphismus von Gruppen und hängt nur von der eigentlichen Homotopieklasse von c ab.*

Beweis. Zunächst folgt aus Lemma 3.5, dass i_c ein Homomorphismus ist. Wegen Aussage 4) in Lemma 3.5 sind $i_{(c^{-1})} \circ i_c$ und $i_c \circ i_{(c^{-1})}$ die jeweilige identische Abbildung, also ist i_c ein Isomorphismus. Nach Aussage 1) in Lemma 3.5 hängt i_c nur von der Homotopieklasse von c ab. □

Damit erhalten wir eine Vorschrift, die jedem Punkt $x \in X$ die erste Homotopiegruppe $\pi_1(X, x)$ und jeder eigentlichen Homotopieklasse $[c]$ von Wegen in X den entsprechenden Isomorphismus i_c zuordnet. Diese Zuordnung nennt man das *Fundamentalgruppoid* von X.

Falls c eine Schleife ist, so ist i_c die Konjugation mit $[c]$ in $\pi_1(X, x_0)$. Im allgemeinen ist $\pi_1(X, x_0)$ nicht Abelsch, dieser Isomorphismus also nicht unbedingt die Identität. Dies ist einer der Gründe, warum die Diskussion der ersten Homotopiegruppe häufig eine etwas verzwickte Angelegenheit ist.

3.10. KOROLLAR. *Falls X wegzusammenhängend ist, so hängt die Isomorphieklasse von $\pi_1(X, x)$ nicht vom Basispunkt x ab.* □

Wir nennen dann diese Isomorphieklasse oder jeden Repräsentanten hiervon die *Fundamentalgruppe* von X, geschrieben $\pi_1(X)$.

Ein topologischer Raum X heißt heißt *einfach zusammenhängend*, wenn X wegzusammenhängend ist und je zwei Wege c_0, c_1 in X mit gleichen Anfangs- und Endpunkten eigentlich homotop sind. In den Beispielen in 3.8 zeigen wir, dass $\mathbb{R}^n$ für alle $n \geq 0$ und S^n für alle $n \geq 2$ einfach zusammenhängend ist.

3.11. ÜBUNGEN. Für $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ sei $D(x, y, z)$ das von x, y und z aufgespannte Dreieck, also die Menge aller Punkte $ax + by + cz$ mit $a, b, c \geq 0$ und $a + b + c = 1$. Ein solches Dreieck nennen wir *nicht entartet*, wenn x, y, z nicht kollinear sind.
1) Seien $D(x, y, z)$ und $D(x', y', z')$ zwei nicht entartete Dreiecke in $\mathbb{R}^2$. Konstruiere einen Homöomorphismus $h : D(x, y, z) \to D(x', y', z')$ mit $h(x) = x'$, $h(y) = y'$ und $h(z) = z'$.
2) Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $\pi_1(X, x) = \{1\}$ für ein $x \in X$ ist.
Tip: Zerlege I^2 auf zwei verschiedene Arten in geeignete Dreiecke, um einen Homöomorphismus $h : I^2 \to I^2$ zu erhalten, der eigentliche Homotopien zwischen Wegen c_0 und c_1 in eigentliche Homotopien von $c_0 * y * c_1^{-1}$ verwandelt, $y = c_0(1)$.
3) Eine Schleife c in einem topologischen Raum X ist genau dann nullhomotop, wenn es eine Homotopie $H : I \times I \to X$ von c gibt, so dass $H(s, 0) = H(s, 1)$ für alle $s \in I$ und $H(1, \cdot)$ eine konstante Kurve ist.

3.3. **Wegeräume.** Sei $\Omega(X)$ die Menge aller Wege in X. Für $K \subset I$ kompakt und $U \subset X$ offen sei $C(K, U)$ die Menge aller Wege c in X mit $c(K) \subset U$. Die von den $C(K, U)$ erzeugte Topologie auf $\Omega(X)$, mit $K \subset I$ kompakt und $U \subset X$ offen, nennen wir die *kompakt-offen Topologie*, kurz: k.o.-Topologie. Für $x, y \in X$ setzen wir $\Omega_{xy}(X) := \{c \in \Omega(X) \mid c(0) = x \text{ und } c(1) = y\}$ und $\Omega_x(X) := \Omega_{xx}(X)$. Die k.o.-Topologie induziert Topologien auf den $\Omega_{xy}(X)$ und $\Omega_x(X)$.

3.12. Lemma. *Die Formel $H(s,t) = h(s)(t)$ stellt eine eins-zu-eins Beziehung zwischen Homotopien $H : I \times I \to X$ und Wegen $h : I \to \Omega(X)$ her.* □

Hierbei ist eine Homotopie eine stetige Abbildung $H : I \times I \to X$ zwischen den gedachten Wegen $c_0 := H(0, \cot)$ und $c_1 := H(1, \cdot)$: Nach Lemma 3.12 sind Wege $c_0, c_1 \in \Omega_{xy}(X)$ genau dann eigentlich homotop, wenn es einen Weg in $\Omega_{xy}(X)$ von c_0 nach c_1 gibt. Insbesondere besteht $\pi_1(X, x)$ genau aus den Wegzusammenhangskomponenten von $\Omega_x(X)$.

Wir bezeichnen nun die Wegzusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes X mit $\pi_0(X)$. Falls X punktiert ist mit ausgezeichnetem Basispunkt $x \in X$, so ist die Wegzusammenhangskomponente von x ein ausgezeichneter Basispunkt von $\Omega_0(X)$. Diese punktierte Menge bezeichnen wir mit $\pi_0(X, x)$. Im diskutierten Beispiel $\Omega_x(X)$ ist die konstante Kurve x ein ausgezeichneter Punkt. Die höheren Homotopiegruppen von (X, x) werden dann rekursiv für alle $i \geq 2$ duch $\pi_i(X, x) := \pi_{i-1}(\Omega_x(X), x)$ definiert.

3.13. Lemma. *1) Die Inversion $i : \Omega(X) \to \Omega(X)$, $c \mapsto c^{-1}$, ist stetig.*
2) $\Omega_{xy}(X) \times \Omega_{yz}(X) \to \Omega_{xz}(X)$, $(c, c') \mapsto c * c'$, ist stetig. □

3.14. Übungen. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.
1) Ein Weg $c : I \to M$ heisst stückweise glatt, wenn es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ gibt, so dass $c : [t_{i-1}, t_i] \to M$ glatt ist für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. Zeige: Zu jedem Weg $c_0 : I \to M$ gibt es eine eigentliche Homotopie zu einem stückweise glatten Weg $c_1 : I \to M$.
2) Eine Homotopie $H : I \times I \to M$ heisst stückweise glatt, wenn es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ gibt, so dass $H : I \times [t_{i-1}, t_i] \to M$ glatt ist für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. Zeige: Seien c_0 und c_1 stückweise glatte Wege mit denselben Endpunkten. Falls dann eine eigentliche Homotopie H von c_0 nach c_1 existiert, so auch eine stückweise glatte eigentliche Homotopie.
3) Analoge Aussagen gelten für glatte Wege und Homotopien. Warum ist es aber praktischer, mit stückweise glatten Wegen zu arbeiten?
4) Was bedeuten diese Aussagen für $\pi_1(M, x)$?

4. Überlagerungen

Sei $p : E \to X$ eine stetige Abbildung. Ein Punkt $x \in X$ wird *gleichmässig von p überlagert*, falls es eine offene Umgebung U von x in X gibt, so dass das Urbild $p^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung offener Mengen ist, $p^{-1}(U) = \dot{\cup}_{\alpha \in A} U_\alpha$, so dass $p : U_\alpha \to U$ für alle $\alpha \in A$ ein Homöomorphismus ist. Eine *Überlagerung* ist eine surjektive stetige Abbildung $p : E \to X$, so dass jeder Punkt $x \in X$ gleichmässig von p überlagert wird.

4.1. Beispiele. 1) $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(r) = \exp(ir)$, ist eine Überlagerung. Denn für $x \in S^1$ ist $U := S^1 \setminus \{-x\}$ eine Umgebung von x in S^1, die gleichmässig von p überlagert wird.

2) Falls $p_1 : E_1 \to X_1$ und $p_2 : E_2 \to X_2$ Überlagerungen sind, so ist auch das Produkt $E_1 \times E_2 \to X_1 \times X_2$, $(z_1, z_2) \mapsto (p_1(z_1), p_2(z_2))$, eine Überlagerung. Insbesondere ist

$$\mathbb{R}^n \to T^n := (S^1)^n, \quad (r_1, \ldots, r_n) \mapsto (\exp(ir_1), \ldots, \exp(ir_n)),$$

eine Überlagerung des *Torus* T^n durch den Euklidischen Raum R^n.

Eine Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus, aber die Umkehrung gilt nicht. Der Leser finde ein Beispiel.

4.1. **Lifte.** Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung. Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to X$ stetig. Dann heisst eine stetige Abbildung $g : Y \to E$ ein *Lift* von f, falls $f = p \circ g$ ist.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Die nächsten beiden Sätze über Lifte sind die grundlegenden Resultate über Überlagerungen.

4.2. Satz. *Sei $p : E \to X$ Überlagerung. Sei Y ein weiterer topologischer Raum, und seien $g, h : Y \to E$ stetige Abbildungen mit $p \circ g = p \circ h$. Falls Y zusammenhängend ist und es einen Punkt $y \in Y$ gibt mit $g(y) = h(y)$, so ist $g = h$.*

Beweis. Sei $Z = \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}$. Zu zeigen ist $Z = Y$.

1) Z ist abgeschlossen: Sei $y \in Y \setminus Z$, also $g(y) \neq h(y)$, und sei $x = p(g(y)) = p(h(y))$. Sei U eine Umgebung von x in X, die gleichmässig von p überlagert wird, $p^{-1}(U) = \dot{\cup}_{\alpha \in A} U_\alpha$, wobei $p : U_\alpha \to U$ für alle $\alpha \in A$ ein Homöomorphismus sei. Nun sind $g(y)$ und $h(y)$ in $p^{-1}(x) \subset p^{-1}(U)$ und verschieden. Die Indizes $\alpha, \beta \in A$ mit $g(y) \in U_\alpha$ und $h(y) \in U_\beta$ sind daher auch verschieden. Weil U_α und U_β offen und g und h stetig sind, gibt es eine Umgebung V von y in Y mit $g(V) \subset U_\alpha$ und $h(V) \subset U_\beta$. Wegen $\alpha \neq \beta$ sind U_α und U_β disjunkt. Daher ist $V \subset Y \setminus Z$. Mithin ist $Y \setminus Z$ offen, also Z abgeschlossen.

2) Z ist offen: Sei $y_0 \in Z$, also $g(y_0) = h(y_0)$, und sei $x_0 = p(g(y_0)) = p(h(y_0))$. Sei U eine Umgebung von x_0 in X, die wie oben gleichmässig von p überlagert wird, $p^{-1}(U) = \dot{\cup}_{\alpha \in A} U_\alpha$. Sei $\alpha \in A$ der Index mit $g(y_0) = h(y_0) \in U_\alpha$. Weil U_α offen ist und g und h stetig sind, gibt es eine offene Umgebung V von y in Y mit $g(V), h(V) \subset U_\alpha$. Nun ist aber $p : U_\alpha \to U$ eine Homöomorphismus und damit insbesondere auf U_α injektiv. Andererseits ist $p(g(y)) = p(h(y))$ für alle $y \in V$, also $g(y) = h(y)$ für alle $y \in V$. Daher ist $V \subset Z$, mithin Z offen.

Nach Annahme ist Y zusammenhängend und $Z \neq \emptyset$. Daher ist $Z = Y$. $\square$

4.3. Korollar. *Sei $f : Y \to X$ stetig und $g : Y \to E$ ein Lift von f. Falls $Z \subset Y$ zusammenhängend und f auf Z konstant ist, so ist g auf Z konstant.*

Beweis. Die Einschränkung von g auf Z ist ein Lift der Einschränkung von f auf Z. Sei $y_0 \in Z$, und seien $x_0 := f(y_0)$, $z_0 := g(y_0)$. Dann ist $f(y) = x_0$ für alle $y \in Z$. Mithin ist die konstante Abbildung $h : Z \to E$, $h(y) = z_0$ für alle $y \in Z$, ebenfalls ein Lift der Einschränkung von f auf Z. Nun ist Z zusammenhängend und $g(y_0) = h(y_0)$, also ist $g = h$. $\square$

4.4. Satz. *Sei $p : E \to X$ Überlagerung. Sei Y ein weiterer topologischer Raum, und seien $f : I \times Y \to X$ und $g : Y \to E$ stetige Abbildungen mit $p(g(y)) = f(0, y)$ für alle $y \in Y$. Dann gilt es genau einen Lift h von f mit Anfangswert $h(0, y) = g(y)$ für alle $y \in Y$.*

Falls wir die Inklusion $Y \to I \times Y$, $y \mapsto (0, y)$, mit i_0 bezeichnen, so wird die Aussage von Satz 4.4 in folgendem Diagramm deutlich:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times Y \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & X \end{tikzcd}$$

Beweis von Satz 4.4. In einem ersten Schritt zeigen wir, dass zu jedem Punkt $y_0 \in Y$ eine offene Umgebung $V = V_{y_0}$ von y_0 in Y existiert, sodass f eingeschränkt auf $I \times V$ einen Lift $h = h_{y_0}$ besitzt mit $h(0, y) = g(y)$ für alle $y \in V$.

Weil $I = [0, 1]$ kompakt ist, gibt es eine Unterteilung $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ von I und von p gleichmässig überlagerte offene Mengen $U_1, \ldots, U_k$ von X mit $c([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$: Für $1 \leq i \leq k$ sei $p^{-1}(U_i) = \dot{\cup}_{\alpha \in A_i} U_{i\alpha}$, wobei $p : U_{i\alpha} \to U_i$ für alle $\alpha \in A_i$ ein Homöomorphismus sei. Rekursiv definieren wir nun einen Lift h_i von f eingeschränkt auf $[0, t_i] \times V_i$, wobei die V_i geeignete offene Umgebungen von y_0 in Y sind:

1) Sei $\alpha_1 \in A_1$ der Index mit $g(y_0) \in U_{1\alpha_1}$. Weil g stetig ist, gibt es eine offene Umgebung V_1' von $y_0 \in Y$ mit $g(V_1') \subset U_{1\alpha_1}$. Weil f stetig ist und $[0, t_1]$ kompakt, gibt es eine weitere offene Umgebung V_1'' von $y_0 \in Y$ mit $f([0, t_1] \times V_1'') \subset U_1$. Sei $V_1 := V_1' \cap V_1''$ und τ die Umkehrabbildung zu $p : U_{1\alpha} \to U_1$. Auf $[0, t_1] \times V_1$ setze $h_1(t, y) = \tau(f(t, y))$. Dann ist h_1 ein Lift von f auf $[0, t_1] \times V_1$. Weil $p : U_{1\alpha} \to U_1$

injektiv und $h_1([0,t_1]\times V_1)\subset U_{1\alpha_1}$ ist, folgt $h_1(0,y)=g(y)$ für alle $y\in V_1$.
2) Sei nun $i\geq 2$ und rekursiv h_{i-1} eine Lift von f eingeschränkt auf $[0,t_{i-1}]\times V_{i-1}$ mit $h_{i-1}(0,y)=g(y)$ für alle $y\in V_{i-1}$, wobei V_{i-1} eine offene Umgebung von y_0 in Y sei. Sei $\alpha_i\in A_i$ der Index mit $h_{i-1}(t_{i-1},y_0)\in U_{i\alpha_i}$. Weil h_{i-1} stetig ist, gibt es eine offene Umgebung V_i' von $y_0\in V_{i-1}$ mit $h_{i-1}(\{t_{i-1}\}\times V_i')\subset U_{i\alpha_i}$. Weil f stetig ist und $[t_{i-1},t_i]$ kompakt, gibt es eine weitere offene Umgebung V_i'' von $y_0\in Y$ mit $f([t_{i-1},t_i]\times V_i'')\subset U_i$. Sei $V_i:=V_i'\cap V_i''$ und τ die Umkehrabbildung zu $p:U_{i\alpha_i}\to U_i$. Auf $[t_{i-1},t_i]\times V_i$ setze $h_i'(t,y):=\tau(f(t,y))$. Dann ist h_i auf $[t_{i-1},t_i]\times V_i$ ein Lift von f. Ferner ist $V_i\subset V_{i-1}$ und $h_i(t_{i-1},y)=h_{i-1}(t_{i-1},y)$ für alle $y\in V_i$, denn p ist injektiv auf $U_{i\alpha_i}$. Daher ist $h_i:[0,t_i]\times V_i\to E$,

$$h_i(t,y):=\begin{cases}h_{i-1}(t,y) & 0\leq t\leq t_{i-1},\\ h_i'(t,y) & t_{i-1}\leq t\leq t_i,\end{cases}\tag{4.5}$$

wohldefiniert und stetig, ist also ein Lift von f auf $[0,t_i]\times V_i$ mit $h_i(0,y)=g(y)$ für alle $y\in V_i$. In k Schritten erhalten wir den gewünschten Lift $h:I\times V\to E$ von f mit $h(0,y)=g(y)$ für alle $y\in V$.

Seien jetzt $y_0,y_1\in Y$ und $y\in V_{y_0}\cap V_{y_1}$. Dann gilt $h_{y_0}(0,y)=h_{y_1}(0,y)=g(y)$ und $p(h_{y_0}(t,y))=p(h_{y_1}(t,y))=f(t,y)$ für alle $t\in I$ Mit Satz 4.2 folgt daher $h_{y_0}(t,y)=h_{y_1}(t,y)$ für alle $t\in I$. Die verschiedenen Lifts h_y, $y\in Y$, setzen sich damit zu einer Abbildung $h:I\times Y\to E$ zusammen. Die V_y sind offen, daher ist h stetig. Weil I zusammenhängend ist, ist h nach Satz 4.2 eindeutig bestimmt. □

4.6. Korollar. *Sei $p:E\to X$ eine Überlagerung und $c:I\to X$ ein Weg. Zu jedem $z\in E$ über $c(0)$, $c(0)=p(z)$, gibt es dann einen eindeutigen Lift $c_z:I\to E$ von c mit $c_z(0)=z$.* □

Für $k\geq 0$ sei I^k das k-fache Produkt, wobei $I^0:=\{0\}$. Wir betrachten I^k als Teilmenge von I^{k+1},

$$I^k=\{(t_1,\dots,t_k,0)\mid t_i\in I\}.$$

Das Quadrat I^2 ist der Definitionsbereich von Homotopien zwischen Wegen.

4.7. Korollar. *Sei $H:I^k\to X$ stetig und $z\in p^{-1}(H(0))$. Dann gibt es genau einen Lift H_z von H mit $H_z(0)=z$.*

Beweis. Für $k=0$ ist dies klar, für $k=1$ ist die Behauptung die Aussage des Korollars 4.6. Falls die Behauptung für ein $k\geq 1$ gilt, so gilt sie wegen Satz 4.4 auch für I^{k+1}, denn $I^{k+1}=I\times I^k$. □

4.8. Korollar. *Seien $p:E\to X$ eine Überlagerung, $z\in E$ und $p(z)=x$. Dann ist $p_\#:\pi_1(E,z)\to\pi_1(X,x)$ injektiv.*

Beweis. Sei $c':I\to E$ eine Schliefe in z und $c=p\circ c'$. Sei $H:I\times I$ eine eigentliche Homotopie von c zur Punktkurve x. Sei H' der Lift von H mit $H(0,0)=z$. Nun ist $Y=\{(s,t)\in I\times I\mid s=1 \text{ oder } t=0 \text{ oder } t=1\}$ zusammenhängend und

$H|Y = x$, mit Satz 4.2 folgt $H'|Y = z$. Ebenfalls mit Satz 4.2 folgt $H'(0,\cdot) = c'$. Daher ist H' eine eigentliche Homotopie von c' zur Punktkurve z. Also ist $p_\# : \pi_1(E,z) \to \pi_1(X,x)$ injektiv. □

Ein topologischer Raum Y heißt *lokal wegzusammenhängend*, falls es zu jedem $y \in Y$ und jeder Umgebung U von y in Y eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von y gibt.

4.9. Übung. Falls X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, so ist X wegweise zusammenhängend.

4.10. Theorem. *Sei Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und sei $f : Y \to X$ stetig. Seien $y_0 \in Y$, $x_0 := f(y_0)$ und $z_0 \in p^{-1}(x_0)$. Dann gibt es genau dann einen Lift g von f mit $g(y_0) = z_0$, wenn $f_\#(\pi_1(Y,y_0)) \subset p_\#(\pi_1(E,z_0))$.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig, denn wenn g ein Lift von f ist mit $g(y_0) = z_0$, so ist

$$f_\#(\pi_1(Y,y_0)) = p_\#(g_\#(\pi_1(Y,y_0))) \subset p_\#(\pi_1(E,z_0)).$$

Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Sei dazu $y \in Y$. Nach Übung 4.9 ist Y wegzusammenhängend. Sei c ein Weg c von y_0 nach y. Dann ist $f \circ c$ ein Weg von $f(y_0) = x_0$ nach $f(y)$. Nach Korollar 4.6 gibt es genau einen Lift σ von $f \circ c$ mit $\sigma(0) = z_0$. Wir setzen $g(y) := \sigma(1)$.

1) g ist wohldefiniert: Falls $\tilde{c}$ ein weiterer Weg von y_0 nach y ist und $\tilde{\sigma}$ der Lift von $f \circ \tilde{c}$ mit $\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1)$, so ist $\sigma * \tilde{\sigma}^{-1}$ der Lift von $f \circ (c * \tilde{c}^{-1})$. Nun ist $c * \tilde{c}^{-1}$ eine Schleife in y_0, und nach Voraussetzung ist das Bild von $f_\#$ im Bild von $p_\#$. Daher gibt es eine Schleife $\sigma_1 : I \to E$ in z_0, so dass $c_1 := p \circ \sigma_1$ und $c_0 := f \circ (c * \tilde{c}^{-1})$ eigentlich homotop sind. Sei H eine eigentliche Homotopie von c_0 nach c_1. Nach Korollar 4.7 existiert ein Lift $\tilde{H}$ von H mit $\tilde{H}(0,0) = z_0$. Nach Korollar 4.3 ist $\tilde{H}$ eine eigentliche Homotopie zwischen dem Lift σ_0 von c_0 mit $\sigma_0(0) = z_0$ und σ_1. Also ist $\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1)$ und daher g wohldefiniert.

2) g ist Lift von f: Nach Konstruktion gilt $p \circ g = f$ und $g(y_0) = z_0$. Zu zeigen bleibt die Steigkeit von g. Sei dazu $y_1 \in Y$ und c ein Weg von y_0 nach y_1. Sei σ der Lift von $f \circ c$ mit $\sigma(0) = z_0$. Dann ist $g(y_1) = \sigma(1)$. Sei U eine Umgebung von $f(y_1)$ in X, die von p gleichmässig überlagert wird, $p^{-1}(U) = \dot\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ wie oben. Sei $\alpha \in A$ der Index mit $g(y_1) \in U_\alpha$, und sei $\tau : U \to U_\alpha$ die Umkehrabbildung von $p : U_\alpha \to U$. Weil f stetig und Y lokal wegzusammenhängend ist, gibt es eine wegweise zuzsammenhängende Umgebung V von y_1 in Y mit $f(V) \subset U$. Zu $y \in V$ sei c_y ein Weg von y_1 nach y. Dann ist $c * c_y$ ein Weg von y_0 nach $y \in V$ und $\sigma * (\tau \circ f \circ c_y)$ der Lift von $f \circ (c * c_y)$ mit Anfangspunkt z_0. Also folgt $g(y) = \tau(f(y))$ für alle $y \in V$, daher ist f stetig. □

4.2. **Existenz von Überlagerungen.** Falls die Topologie von X nicht allzu schlecht ist, ist die Existenz von Überlagerungen eng mit der Fundmentalgruppe von X verknüpft.

4.11. Theorem. *Sei X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Es gebe eine Überdeckung von X mit einfach zusammenhängenden, offenen Teilmengen. Sei $x_0 \in X$ und $G \subset \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau eine Überlagerung $p : E \to X$ mit E zusammenhängend und ausgezeichnetem Basispunkt $z_o \in E$ über x_0, so dass $p_\#(\pi_1(E, z_0)) = G$ ist.*

Beweis. Homotopieklassen (rel$\{0,1\}$) von Wegen bezeichnen wir mit eckigen Klammern. Falls c eine Schleife in x_0 ist, so ist nach Definition $[c] \in \pi_1(X, x_0)$.

Sei Ω_0 die Menge aller Wege in X, die in x_0 anfangen. Auf Ω_0 definieren wir wie folgt eine "Aquivalenzrelation:

$$c_0 \sim c_1 \Leftrightarrow c_0(1) = c_1(1) \text{ und } [c_0 * c_1^{-1}] \in G.$$

Die Äquivalenzklasse von $c \in \Omega_0$ bezeichnen wir mit $[c]_G$, die Menge der Äquivalenzklassen ist unser Raum E. Offensichtlich definiert $p([c]_G) := c(1)$ eine Abbildung $p : E \to X$.

Für $U \subset X$ offen und $c \in \Omega_0$ ein Weg mit $c(1) \in U$ sei (U, c) die Menge der Äquivalenzklassen in E, die einen Repräsentanten der Form $c * \sigma$ besitzen, wobei σ ein Weg in U ist. Wir zeigen jetzt, dass die Mengen (U, c) eine Topologie auf E induzieren, die die entsprechenden Behauptungen des Satzes erfüllt:

1) Die (U, c) sind eine Basis einer Topologie auf E: Sei $U \subset X$ offen, und seien $c_0, c_1 \in \Omega_0$ Wege mit $c_0(1), c_1(1) \in U$. Falls $[c_1]_G \in (U, c_0)$ ist, dann gibt es einen Weg σ in U mit $c_1 \sim c_0 * \sigma$, also mit $[c_0 * \sigma * c_1^{-1}] \in G$. Falls dann $[c_1 * \sigma']_G \in (U, c_1)$ ist, so ist $c_1 * \sigma' \sim c_0 * \sigma * \sigma'$, also $[c_1 * \sigma']_G \in (U, c_0)$. Mithin folgt $(U, c_1) \subset (U, c_0)$. Wenn wir die Rollen von c_0 und c_1 vertauschen, so folgt die umgekehrte Inklusion, also die Gleichheit $(U, c_1) = (U, c_0)$. Für zwei Mengen (U_0, c_0) und (U_1, c_1) und $[c_2]_G \in (U_0, c_0) \cap (U_1, c_1)$ ist deshalb $(U_0 \cap U_1, c_2) \subset (U_0, c_0) \cap (U_1, c_1)$. Damit folgt die Behauptung. Wir betrachten E ab jetzt mit der durch die (U, c) induzierten Topologie.

2) Seien $c_0, c_1 \in \Omega_0$ Wege mit Endpunkt in U. Dann ist entweder $(U, c_0) = (U, c_1)$ oder $(U, c_0) \cap (U, c_1) = \emptyset$: Sei $(U, c_0) \cap (U, c_1) \neq \emptyset$ und $c \in \Omega_0$ ein Weg, der eine Äquivalenzklasse im Durchschnitt repräsentiert. Dann gibt es Wege σ_0, σ_1 in U mit $c_0 * \sigma_0 \sim c \sim c_1 * \sigma_1$, also mit $[c_0 * \sigma_0 * \sigma_1^{-1} * c_1^{-1}] \in G$. Dann ist aber $c_0 * \sigma_0 * \sigma_1^{-1} \sim c_1$, also $(U, c_0) = (U, c_1)$ nach 1).

3) Die Projektion p ist stetig und offen: Sei $U \subset X$ offen. Dann ist das Urbild $p^{-1}(U) = \cup(U, c)$, also ist $p^{-1}(U)$ offen in E. Daher ist p stetig. Umgekehrt ist $p((U, c))$ die Wegzusammenhangskomponente von $c(1)$ in U. Diese ist offen, denn X ist lokal wegzusammenhängend. Also ist p offen.

4) Sei U einfach zusammenhängend und offen. Dann ist $p : (U, c) \to U$ bijektiv: Weil U wegzusammenhängend ist, gibt es zu jedem $x \in U$ einen Weg σ in U von $c(1)$ nach x. Also ist p surjektiv. Umgekehrt wird jedes Urbild unter p in (U, c)

durch einen solchen Weg $c * \sigma$ repräsentiert. Je zwei Wege σ und σ' in U von $c(1)$ nach x sind aber eigentlich homotop, denn U ist einfach zusammenhängend. Damit folgt $c * \sigma \sim c * \sigma'$, daher ist p auf (U, c) injektiv.

Damit haben wir bewiesen, dass $p : E \to X$ eine Überlagerung ist. Mit $z_0 \in E$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse des konstanten Weges x_0 in X. Dann ist $p(z_0) = x_0$ nach Definition von p. Sei nun $c \in \Omega_0$. Für $t \in I$ sei $c_t \in \Omega_0$ der Weg $c_t(\tau) = c(t\tau)$. Offensichtlich ist $\tilde{c} : I \to E$, $\tilde{c}(t) := [c_t]_G$, stetig mit $\tilde{c}(0) = z_0$ und $p \circ \tilde{c} = c$. Also ist $\tilde{c}$ der Lift von c mit Anfangspunkzt z_0. Falls c Schleife in c ist mit $[c] \in G$, so ist $c \sim x_0$, also $\tilde{c}(1) = z_0$. Daher ist G im Bild von $p_\#$. Falls umgekehrt $\tilde{c}$ Schleife in z_0 ist und $c = p \circ \tilde{c}$, so ist c Schleife in x_0 und $\tilde{c}$ ist der Lift von c mit Anfangspunkzt z_0. Damit stimmt $\tilde{c}$ mit dem eben konstruierten Lift überein, also ist $[c]_G = \tilde{c}(1) = z_0$, mithin ist $[c] \in G$.

Sei $p' : E' \to X$ eine weitere Überlagerung, $z_0' \in E'$ ein Basispunkt und $p'_\#(\pi_1(E', z_0')) = G$. Dann gibt es nach Theorem 4.4 eindeutig bestimmte Lifte $f : E \to E'$ von p und $f' : E' \to E$ von p' mit $f(z_0) = z_0'$ und $f'(z_0') = z_0$. Dann gilt $p' \circ (f \circ f') = p'$, $p \circ (f' \circ f) = p$, $(f' \circ f)(z_0) = z_0$ und $(f \circ f')(z_1) = z_1$. Wieder mit Theorem 4.4 folgt, dass die Kompositionen $f \circ f'$ und $f' \circ f$ die jeweiligen identischen Abbildungen sind, denn diese sind entsprechende Lifte. $\square$

4.12. Bemerkungen. 1) Mannigfaltigkeiten der Dimension n können mit offenen Teilmengen überdeckt werden, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind. Daher erfüllen zusammenhängende Mannigfaltigkeiten die Voraussetzungen an die Topologie.
2) Eine etwas allgemeinere Version des Satzes wird in [Sp] bewiesen.

4.3. **Eindeutigkeit von Überlagerungen.** Seien $p : E \to X$ und $p' : E' \to X$ Überlagerungen. Ein *Morphismus* von E nach E' ist eine stetige Abbildung $f : E \to E'$ mit $p' \circ f = p$. Die üblichen Varianten Iso-, Endo- und Automorphismus übernehmen wir sinngemäß. Automorphismen nennt man auch *Überlagerungstransformationen*. Zu einer gegebenen Überlagerung bilden diese zusammen mit der Komposition eine Gruppe.

4.13. Lemma. *Sei $f : E \to E'$ ein Morphismus. Falls E' wegzusammenhängend ist, so ist f Überlagerung.*

Beweis. Surjektivität von f folgt aus Korollar 4.6. Der Rest ist klar. $\square$

Ab jetzt sei X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Wir betrachten Überlagerungen $p : E \to X$ mit zusammenhängenden E. Weil Überlagerungen lokale Homöomorphismen sind, sind die Überlagerungsräume E ebenfalls lokal wegzusammenhängend, also auch wegzusammenhängend.

4.14. Satz. *Sei $p : E \to X$ Überlagerung mit E und X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Seien $x_0 \in X$ und $z_0, z_1 \in p^{-1}(x_0)$, und sei $G = p_\#(\pi_1(E, z_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$. Sei $c_1 : I \to E$ ein Weg von z_0 nach z_1 und $c = p \circ c_1$. Dann ist $p_\#(\pi_1(E, z_1)) = [c]^{-1} \cdot G \cdot [c]$.*

Beweis. Die Abbildung $i_{c_1} : \pi_1(E, z_1) \to \pi_1(E, z_0)$ ist ein Isomorphismus, siehe Satz 3.9. Ferner ist $p_\# \circ i_{c_1}^{-1} = i_c^{-1} \circ p_\#$. Damit folgt

$$\begin{aligned} p_\#(\pi_1(E, z_1)) &= (p_\# \circ i_{c_1}^{-1})(\pi_1(E, z_0)) \\ &= (i_c^{-1} \circ p_\#)(\pi_1(E, z_0)) = [c]^{-1} \cdot G \cdot [c]. \end{aligned}$$ □

4.15. Theorem. *Sei $p : E \to X$ Überlagerung mit E und X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $x_0 \in X$, $z_0 \in p^{-1}(x_0)$ und $G = p_\#(\pi_1(E, z_0))$.*
1) Sei $c_1 : I \to E$ ein Weg von z_0 nach $z_1 \in p^{-1}(x_0)$ und $c = p \circ c_1$. Dann gibt es genau dann eine Überlagerungstransformation $f : E \to E$ mit $f(z_0) = z_1$, wenn $[c]$ im Normalisator N von G in $\pi_1(X, x_0)$ enthalten ist.
2) Die Abbildung, die $[c] \in N$ die Überlagerungstransformation zuordnet, die z_0 in den Endpunkt des Lifts c_1 von c abbildet, der in z_0 startet, induziert einen Isomorphismus von N/G auf die Gruppe der Überlagerungstransformationen von $p : E \to X$.

Beweis. 1) Sei $f : E \to E$ eine Überlagerungstransformation mit $f(z_0) = z_1$, also ist $p \circ f = p$. Weil f ein Homöomorphismus ist, ist $f_\#(\pi_1(E, z_0)) = \pi_1(E, z_1)$. Mit Satz 4.14 folgt

$$\begin{aligned} G = p_\#(\pi_1(E, z_0)) &= (p_\# \circ f_\#)(\pi_1(E, z_0)) \\ &= p_\#(\pi_1(E, z_1)) = [c]^{-1} \cdot G \cdot [c], \end{aligned}$$

mithin ist $[c]$ im Normalisator N von G. Falls umgekehrt $[c]$ im Normalisator von G enthalten ist, dann ist $p_\#(\pi_1(E, z_1)) = G$ nach Satz 4.14. Nach Theorem 4.10 gibt es dann eine stetige Abbildung $f : E \to E$ mit $p \circ f = p$ und $f(z_0) = z_1$. Wenn wir noch die Rollen von z_0 und z_1 vertauschen und c durch den inversen Weg c^{-1} ersetzen, dann erhalten wir mit demselben Argument, dass eine stetige Abbildung $f' : E \to E$ existiert mit $p \circ f = p$ und $f'(z_1) = z_0$. Dann ist $p \circ (f \circ f') = p = p \circ (f' \circ f)$ und $(f' \circ f)(z_0) = z_0$ beziehungsweise $(f \circ f')(z_1) = z_1$. Mit Satz 4.2 folgt, dass $f' \circ f$ und $f \circ f'$ die identische Abbildung von E sind. Daher ist f ein Homöomorphismus, also eine Überlagerungstransformation.

2) Seien c_0 und c_1 Wege in E mit Anfangspunkt z_0 und mit $z_1 = c_1(1), z_2 = c_2(1) \in p^{-1}(x_0)$. Seien f_1 und f_2 die Überlagerungstransformationen, mit $f_1(z_0) = z_1$ und $f_2(z_0) = z_2$. Dann ist $c_3 := c_1 * (f_1 \circ c_2)$ der Lift der Schleife $(p \circ c_1) * (p \circ c_2)$ in x_0, der in z_0 startet. Nach Definition ist $(f_1 \circ f_2)(z_0) = f_1(z_2) = c_3(1)$. Die Zusammensetzung der Schleife $(p \circ c_1)$ mit der Schleife $(p \circ c_2)$ entspricht damit der Komposition $f_1 \circ f_2$ der Überlagerungstransformationen f_1 und f_2. Damit erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus $N \to T$, wobei T die Gruppe der Überlagerungstransformationen sei. Der Kern besteht genau aus den Homotopieklassen $[c] \in \pi_1(X, x_0)$, so dass der Lift von c, der in z_0 startet, auch in z_0 endet. Mit anderen Worten, $[c]$ liegt im Bild G von $\pi_1(E, z_0)$ unter $p_\#$. □

Eine Überlagerung $p : E \to X$ mit E und X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend heisst *normal*, wenn $p_\#(\pi_1(E, z_0))$ normal in $\pi_1(X, x_0)$ ist für ein Paar oder, äquivalent dazu, alle Paare von Punkten $z_0 \in E$ und $x_0 \in X$ mit $p(z_0) = x_0$.

4.16. Korollar. *Sei $p : E \to X$ Überlagerung mit E und X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $z_0 \in E$ und $x_0 := p(z_0) \in X$. Dann ist p genau dann normal, wenn zu allen $z_1 \in p^{-1}(x_0)$ eine Überlagerungstransformation f von p existiert mit $f(z_0) = z_1$. Falls p normal ist, dann ist die Gruppe der Überlagerungstransformationen isomorph zu $\pi_1(X, x_0)/p_\#(\pi_1(E, z_0))$.* □

Eine Überlagerung $p : E \to X$ mit zusammenhängendem E heisst *universell*, wenn es zu jeder Überlagerung $p' : E' \to X$ mit zusammenhängendem E' einen Morphismus $f : E \to E'$ gibt.

4.17. Theorem (Universelle Überlagerung). *Sei X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und sei $x_0 \in X$. Es gebe eine Überdeckung von X mit einfach zusammenhängenden, offenen Teilmengen. Dann ist eine Überlagerung $p : E \to X$ mit einfach zusammenhängendem E universell. Die Gruppe der Überlagerungstransformationen ist isomorph zu $\pi_1(X, x_0)$ und gleichmächtig mit dem Urbild $p^{-1}(x_0)$.* □

Nach Theorem 4.11 gibt es unter den Voraussetzungen von Theorem 4.17 Überlagerungen $p : E \to X$ mit einfach zusammenhängendem E.

4.18. Beispiele. 1) Der Kreis S^1 ist zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Für $x \in S^1$ ist $U_\pm = S^1 \setminus \{\pm x\}$ eine Überdeckung von S^1 mit einfach zusammenhängenden, offenen Teilmengen. Daher ist $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ die universelle Überlagerung. Die Überlagerungstransformationen sind genau die Verschiebungen in $\mathbb{R}$ um ganze Vielfache von 2π. Daher ist die Fundamentalgruppe von S^1 isomorph $\mathbb{Z}$. Es folgt, dass die Fundamentalgruppe des Torus $T^n = (S^1)^n$ isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ ist.

2) Sei $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$. Zu $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sei $[x]$ die von x aufgespannte Gerade. Die Menge dieser Geraden nennen wir *projektiver Raum*, geschrieben $\mathbb{R}P^n$. Mitgeliefert wird eine kanonische Abbildung $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$, nämlich $x \mapsto [x]$. Jede der Geraden $[x]$ trifft die Sphäre S^n in genau zwei Punkten, einem Paar von Antipodenpunkten. Also bestehen Urbilder von Punkten jeweils aus genau zwei Punkten.

Zu $0 \le i \le n$ sei $U_i = \{[x] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \ne 0\}$. Dann ist die Abbildung

$$f_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \quad [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

wohldefinert und bijektiv. Es gibt genau eine Topologie auf $\mathbb{R}P^n$, so dass die f_i Homöomorphismen sind. In dieser Topologie ist $\mathbb{R}P^n$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Die Mengen U_i sind dann offen, einfach zusammenhängend und überdecken $\mathbb{R}P^n$. Ferner sind die U_i gleichmässig überlagert, also ist p eine Überlagerung. Für $n \ge 2$ ist S^n einfach zusammenhängend. Alle

Voraussetzungen von Theorem 4.17 sind damit erfüllt, also ist die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}P^n$ für $n \geq 2$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2$.

4.4. **Gruppenwirkungen.** Sei G eine Gruppe und E ein topologischer Raum. Eine Abbildung $w : G \times E \to E$ heisst *Wirkung* von G auf E, wenn gilt:
1) $w(g, \cdot) : E \to E$ ist stetig für alle $g \in G$;
2) $w(e, \cdot) = \mathrm{id}_E$ für das neutrale Element $e \in G$;
3) $w(gh, \cdot) = w(g, \cdot) \circ w(h, \cdot)$ für alle $g, h \in G$.
Die Anforderungen 2) und 3) implizieren, dass die Abbildungen $w(g, \cdot)$ für alle $g \in G$ Homöomorphismen von E sind. Genauer folgt, dass $w(g^{-1}, \cdot) = w(g, \cdot)^{-1}$ ist für alle $g \in G$. Statt der etwas umständlichen Notation $w(g, z)$ schreibt man in der Praxis kurz und bündig gz. Die Regeln 2) und 3) schreiben sich dann einfach als $ez = z$ und $(gh)z = g(hz)$. Zu $z \in E$ nennen wir $Gz := \{gz \mid g \in G\}$ die *Bahn* von z unter G. Mit $G \backslash E$ bezeichnen wir den Raum der Bahnen.

Sei X ein Hausdorffscher Raum und $w : G \times E \to E$ eine Wirkung. Wir nennen w *eigentlich diskontinuierlich*, falls es zu jedem $z \in E$ eine Umgebung U gibt, so dass $gU \cap U \neq \emptyset$ nur für endlich viele $g \in G$ ist. Die Wirkung heisst *frei*, falls aus $gz = z$ für ein $z \in E$ folgt, dass g das neutrale Element von G ist.

4.19. Satz. *Sei X ein Hausdorffscher Raum.*
1) Sei $E \to X$ eine Überlagerung. Dann wirkt die Gruppe der Überlagerungstransformationen frei und eigentlich diskontinuierlich auf E.
2) Sei $G \times E \to E$ eine freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkung von G auf E. Dann gibt es auf dem Raum $X = G \backslash E$ der Bahnen genau eine Topologie, so dass $p : E \to X$ eine Überlagerung ist mit G als Gruppe der Überlagerungstransformationen. □

Danksagungen

Ich danke Alexander Lytchak, der Korrrektur gelesen hat.

Literatur

[Ha] A. Hatcher: *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
[Qu] B. von Querenburg: *Mengentheoretische Topologie*, Hochschultext. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.
[Sp] E. H. Spanier: *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Company, New York etc, 1966.

Mathematisches Institut, Universität Bonn, Beringstrasse 1, D-53115 Bonn,