SPIEGELUNGSGRUPPEN, LIEGRUPPEN UND KAZHDAN-LUSZTIG-POLYNOME

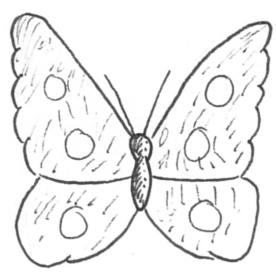
GEORDIE WILLIAMSON

ZUSAMMENFASSUNG. Wir geben einen Einblick in die Welt der Spiegelungsgruppen, Coxeterguppen, Liegruppen and Kazhdan-Lusztig-Polynome.

Abstract: We give a glimpse into the world of reflection groups, Coxeter groups, Lie groups and Kazhdan-Lusztig polynomials.

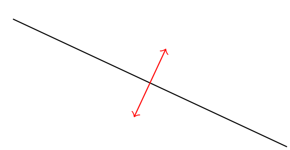
1. Spiegelungen und Spiegelsymmetrie

Zu unseren ersten Begegnungen mit symmetrischen Formen gehört sicher die mit dem Gesicht der Mutter und des Vaters, später vielleicht auch die mit einem Schmetterling.



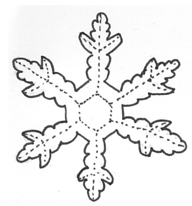
Bereits als Kinder können wir erkennen, ob ein Objekt symmetrisch ist und können seine Symmetrieachse identifizieren.

In der Mathematik ist Symmetrie überall gegenwärtig und nimmt unterschiedliche Formen an. Eine Symmetrie wie die eines Schmetterlings bezeichnen die Mathematiker als *Spiegelsymmetrie*. Eine Gerade in der Ebene bestimmt eine eindeutige Symmetrie um diese Gerade:

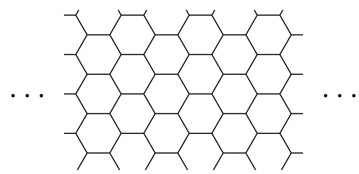


Eine Figur in der Ebene ist spiegelsymmetrisch, wenn die Spiegelung an einer geeigneten Achse eine identische Figur liefert.

Schon als Kinder empfinden wir die Schönheit von Objekten, die auf verschiedene Weisen spiegelsymmetrisch sind. So hat eine Schneeflocke sechs Symmetrieachsen:



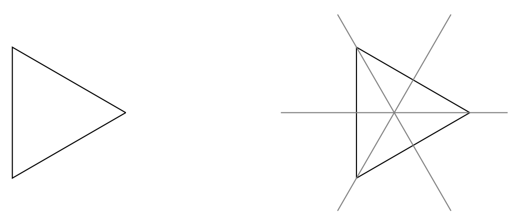
Ein unendlicher Bienenstaat hat unendlich viele Symmetrien:



2. **Spiegelungsgruppen**

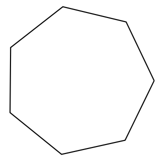
Ein interessantes Forschungsgebiet der modernen Mathematik ist die Untersuchung von Spiegelungsgruppen. Diese sind Ansammlungen oder *Gruppen* von Symmetrien, die Abgeschlossen unter Komposition sind und in der sich jede Symmetrie als eine Komposition von Spiegelungen ausdrücken lässt. (Weiterhin verlangt man, dass sie *diskret* sind. Diskretheit ist eine Eigenschaft, die wir später ausführlich diskutieren werden.) Die Symmetriegruppe eines Schmetterlings ist die Menge $\{id, s\}$, wobei s die Spiegelsymmetrie und id die Identität ist. In der Gruppentheorie spielt die Identität, das heißt die Symmetrie, bei der jeder Punkt fest bleibt, eine wichtige Rolle, ähnlich der Null in der Arithmetik.

Ein zweites Beispiel einer Spiegelungsgruppe sind die Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks:



Die Spiegelungen an den markierten Achsen ergeben drei Spiegelungen. Wir überlassen es dem Leser, nachzuprüfen, dass das Ausführen zweier Spiegelungen an verschiedenen Achsen eine Drehung ergibt. Auf diese Weise haben wir eine komplette Beschreibung der Symmetriegruppe gefunden: es gibt drei Spiegelungen, zwei Drehungen und die Identität.

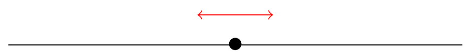
Als nächstes Beispiel betrachten wir ein regelmäßiges n-Eck:



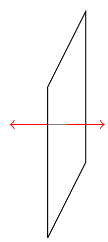
$n = 7$

Die Symmetriegruppe besteht aus n Spiegelungen, $n - 1$ Drehungen und der Identität, also $2n$ Symmetrien insgesamt. Der Fall $n = 6$ ergibt die Symmetrien einer Schneeflocke.

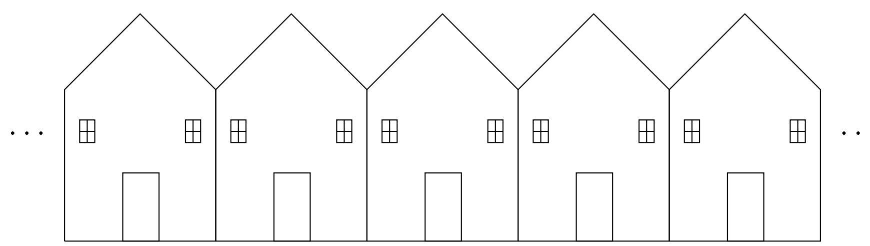
Der Begriff einer Spiegelung hat in jeder Dimension einen Sinn. In einer Dimension ist die Achse einer Spiegelung ein Punkt:



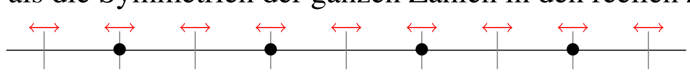
In drei Dimensionen ist sie eine Ebene:



Wie viele Spiegelungsgruppen gibt es? In einer Dimension gibt es nur zwei. Die eine besteht aus den Symmetrien eines Schmetterlings (tatsächlich ein eindimensionales Beispiel!), die andere kann als die Symmetriegruppe einer unendlichen Reihe symmetrischer Häuser beschrieben werden:

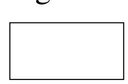


Oder auch als die Symmetrien der ganzen Zahlen in den reellen Zahlen:



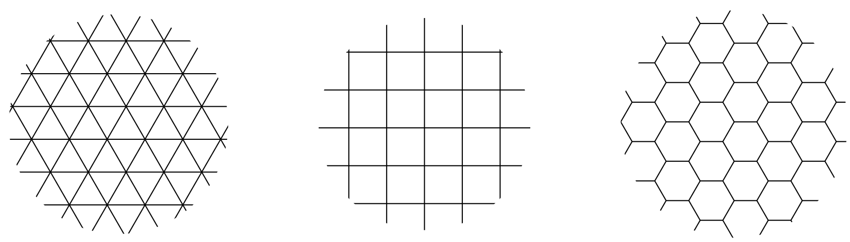
Hier gibt es unendlich viele Symmetrieachsen. Sie ist ein Beispiel einer unendlichen Spiegelungsgruppe.

In zwei Dimensionen ist die Situation komplizierter. Man könnte mit den Symmetrien eines Rechtecks anfangen:



Allerdings betrachten Mathematiker dieses Beispiel als zwei Kopien der Symmetrien eines Schmetterlings. (Die horizontalen und die vertikalen Symmetrien vertauschen miteinander. Deswegen ist die Gruppe das „Produkt" der Symmetrien in der horizontalen und der Symmetrien in der vertikalen Richtung.)

Wenn wir Beispiele ignorieren, die Produkte von eindimensionalen Beispielen sind, dann bleiben als endliche Spiegelungsgruppen die Symmetrien eines regelmäßigen n-Ecks. Desweiteren gibt es zwei Klassen von Beispielen für unendliche Spiegelungsgruppen. Die erste besteht aus den Symmetrien von Kristallsystemen in der (euklidischen) Ebene:



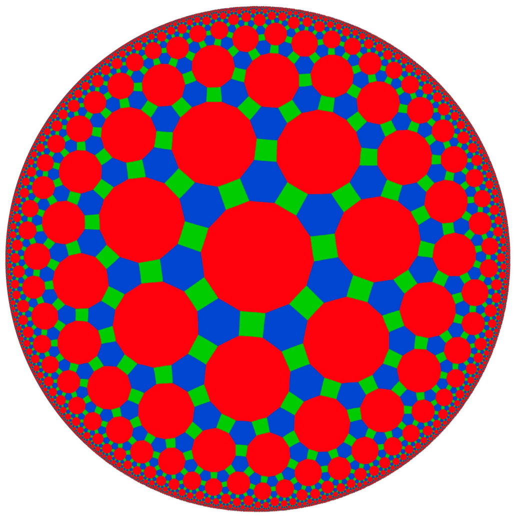
(Das letzte Beispiel ist der unendliche Bienenstaat.)

Die zweite Klasse besteht aus gewissen Symmetrien der sogenannten hyperbolischen Ebene. Die hyperbolische Ebene ist ein Beispiel für eine nichteuklidische Geometrie, das von Bolyai und Lobatschewskij in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts entdeckt wurde. In der Schule lernen wir, dass die Winkelsumme eines Dreiecks immer gleich π ist. Aber dies stimmt nur in der Ebene. Auf einer Sphäre können Dreiecke eine beliebige Winkelsumme zwischen π und 3π erreichen, je nachdem wie groß das Dreieck ist. In der hyperbolischen Ebene sind Winkelsummen zwischen Null (große Dreiecke) und π (kleine Dreiecke) möglich.

Es stellt sich heraus, dass es für ganze Zahlen $p, q, r \geq 2$, für die

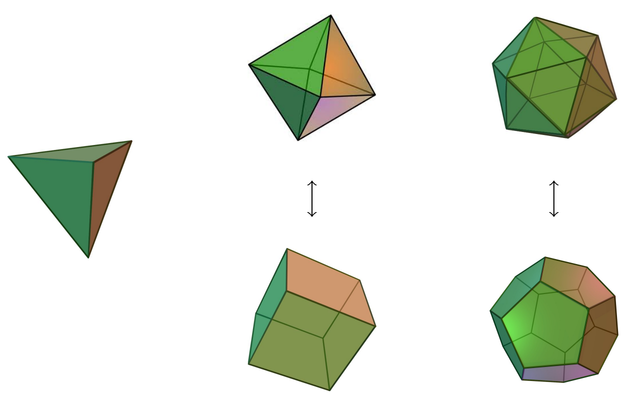
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,$$

eine zweidimensionale Spiegelungsgruppe gibt, die durch Symmetrien auf der hyperbolischen Ebene operiert. Zum Beispiel entsprechen die Symmetrien der folgenden Konfiguration:



dem Fall $p = 2$, $r = 3$ und $q = 7$.

In drei Dimensionen gibt es sehr viele unendliche Spiegelungsgruppen. Dagegen sind die einzigen endlichen dreidimensionalen Spiegelungsgruppen, abgesehen von solchen, die "von Dimension 2 stammen", die Symmetrien der platonischen Körper:

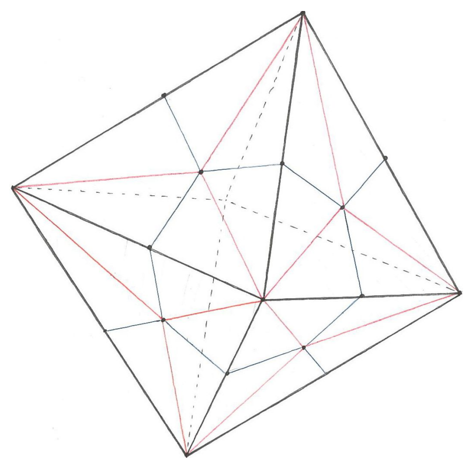


Vielleicht erinnert sich der Leser daran, dass sowohl der Hexaeder und der Oktaeder als auch der Dodekaeder und der Ikosaeder jeweils dual zueinander sind, und deswegen die gleichen Symmetriegruppen haben.

3. **Coxeters Klassifikation der Spiegelungsgruppen**

In den Dreißigerjahren des 20. Jahrhunderts entwickelte der kanadischer Mathematiker H. S. M. Coxeter ein mächtiges Werkzeug zum Verständnis von Spiegelungsgruppen. Es ist häufig der Fall, dass die Achse einer Spiegelung das Objekt, dessen Symmetriegruppe wir betrachten, in zwei gleiche Teile teilt (Dies ist z. B. der Fall in allen Beispielen, die wir bis jetzt betrachtet haben). Wenn wir alle Spiegelungen gleichzeitig betrachten, so wird das Objekt von den Achsen in Stücke, genannt *Alkoven*, unterteilt.

Im Fall eines Oktaeders sieht die Unterteilung zum Beispiel wie folgt aus:



In diesem Fall sind alle Alkoven Dreiecke. Coxeter bemerkte, dass, falls alle Alkoven „Simplexe” sind (ein Intervall in Dimension 1, ein Dreieck in Dimension 2, ein Tetraeder in Dimension 3, usw.) zwei Tatsachen gelten:

- Hält man einen Alkoven fest und betrachtet nur die Spiegelungen an den Wänden dieses Alkovens, so „erzeugen” diese Spiegelungen die ganze Symmetriegruppe. Anders gesagt, kann man *jede* Symmetrie schreiben als eine Komposition von Spiegelungen an den Wänden eines festen Alkovens. (Dieses ist selbst im Fall des Oktaeders oben nicht so leicht einzusehen.)
- Mittels der Geometrie eines festen Alkovens kann man eine komplette Beschreibung der Spiegelungsgruppe angeben. (Mathematiker sagen, dass Coxeter eine *Präsentierung* der Spiegelungsgruppe angeben konnte.)

Heute werden solche Gruppen *Coxeter-Gruppen* genannt. Zum Beispiel sind alle Gruppen, die wir bisher gesehen haben, Coxeter-Gruppen. Im Fall einer endlichen Spiegelungsgruppe oder im Fall der Symmetrien eines Kristallsystems sind Coxeters Annahmen immer erfüllt. Dies erlaubt eine komplette Klassifikation dieser Spiegelungsgruppen in beliebiger Dimension!

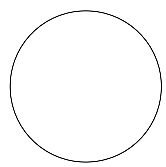
Für hyperbolische Gruppen dagegen sind Coxeters Annahmen häufig, aber nicht immer, erfüllt.

Vor einigen Jahren, während eines Forschungsbesuchs am MPIM in Bonn, untersuchte Anna Vdovina eine spezielle Klasse von Räumen, sogenannte *Gebäude*. Ein („dickes") Gebäude erhält man durch Verkleben vieler Kopien eines einfacheren Raumes, der selber als Symmetrien eine Coxetergruppe hat. Unter Benutzung von hyperbolischen Coxeter-Gruppen gelang es ihr, neue Konstruktionen für Gebäude anzugeben.

4. **Diskrete und kontinuierliche Symmetrie**

Spiegelungsgruppen sind diskret: es ist nicht möglich, eine Symmetrie ein ganz klein wenig zu verändern, und dabei wieder eine (neue) Symmetrie zu erhalten. In allen obigen Beispielen führt eine kleine Verschiebung einer Symmetrieachse dazu, daß sie nicht länger die Achse einer Symmetrie ist.

Ein Beispiel für eine Gruppe, die diese Eigenschaft nicht hat, also nicht diskret ist, sind die Symmetrien eines Kreises:



Hier ist sowohl die Spiegelung an einer beliebigen Geraden durch den Ursprung als auch eine beliebige Drehung um den Ursprung eine Symmetrie. Man spricht hier von *kontinuierlicher* Symmetrie. Andere Beispiele von kontinuierlichen Symmetrien sind alle Symmetrien einer Sphäre oder die Gruppe aller starren Bewegungen des dreidimensionalen Raumes.

Gruppen von kontinuierlichen Symmetrien wurden zuerst von dem norwegischen Mathematiker Sophus Lie untersucht und heißen deswegen Lie-Gruppen. Lie beobachtete, dass viele Gleichungen der Mathematik und der Physik in hohem Maße kontinuierliche Symmetrien besitzen. Er hoffte, dass man die Symmetrien von Gleichungen dazu benutzen könnte, deren Lösungen besser zu verstehen. Diese einfache Idee spielt eine fundamentale Rolle in der modernen Mathematik und Physik. (Fourier-Reihen und die Fourier-Transformation sind die einfachsten Beispiele dieses Phänomens.)

Lie gründete ein Programm zum Verständnis der Struktur von Gruppen kontinuierlicher Symmetrien. Dabei stellte sich eine überraschende Tatsache heraus: jeder Lie-Gruppe (die üblicherweise sehr komplizierte Objekte sind) kann man eine endliche Spiegelungsgruppe zuordnen. Diese Spiegelungsgruppe nennt man seine Weyl-Gruppe, benannt nach dem deutschen Mathematiker Hermann Weyl, der die zentrale Rolle dieser Gruppe betonte.

Der Weg von einer Lie-Gruppe zu seiner Weyl-Gruppe ist kompliziert, daher beschränken wir uns auf das einfachste Beispiel. Im Fall der Lie-Gruppe der Symmetrien einer Sphäre besteht die zugehörige Weyl-Gruppe aus den Symmetrien eines Schmetterlings. In diesem Beispiel konstruiert man die Weyl-Gruppe wie folgt: Erst halten wir eine Gerade ℓ durch den Ursprung fest und betrachten nur diejenigen Drehungen, die diese Gerade erhalten. Es gibt zwei Arten solcher Drehungen: Drehungen um die Achse ℓ selbst (die ℓ punktweise festhalten) und Drehungen um eine Achse senkrecht zu ℓ (die wie eine Spiegelung auf ℓ operieren). Die induzierte Operation auf ℓ ergibt das einfachste Beispiel einer Spiegelungsgruppe.

5. **Kazhdan-Lusztig-Polynome**

Zu jeder Lie-Gruppe gehört eine Weyl-Gruppe. Diese spielen eine sehr wichtige Rolle bei vielen Fragen zu Lie-Gruppen. Der bekannte belgische Mathematiker Jacques Tits sagte sogar: „Eine Lie-Gruppe besteht aus ihrer Weyl-Gruppe, zusammen mit etwas Fleisch."[1] Diese Tatsache ist überraschend, weil die Weyl-Gruppe oft deutlich kleiner und einfacher ist als die zugehörige Lie-Gruppe. Wir haben das am Beispiel der Symmetrien der Sphäre schon gesehen. Ein zweites Beispiel ist die exzeptionelle Lie-Gruppe E_8. Diese Lie-Gruppe hat die Dimension 248 und ist damit sogar zu groß für die größten Supercomputer der Welt! Andererseits ist ihre Weyl-Gruppe eine achtdimensionale Spiegelungsgruppe, die für Rechnungen durchaus zugänglich ist.

Ein Durchbruch beim Studium von Lie-Gruppen brachte 1979 eine Arbeit von Kazhdan and Lusztig. Sie ordneten auf elementare Weise jedem Paar von Elementen einer Coxeter-Gruppe ein Polynom, ihr sogenanntes Kazhdan-Lusztig-Polynom, zu. In den letzten dreißig Jahren haben verschiedene Mathematiker entdeckt, dass diese Polynome bei vielen Fragen im Zusammenhang mit Lie-Gruppen eine wichtige Rolle spielen. (Die auftretenden Polynome sind dann solche, die man der Weyl-Gruppe der Lie-Gruppe zuordnet.)

Ein grundlegendes Problem ist z. B. die Bestimmung des sogenannten „unitären Duals" einer Lie-Gruppe. Damit bezeichnet man die unzerlegbaren Darstellungen einer Gruppe, die man mit einem invarianten Skalarprodukt versehen kann. So ist z. B. für die Symmetriegruppe eines Kreises ihr unitäres Dual eng verknüpft mit der Theorie der Fourier-Reihen. Für kompliziertere Lie-Gruppen führten die Kazhdan-Lusztig-Polynome zu wesentlichen Fortschritten bei der Bestimmung des unitäres Duals, auch wenn das Problem immer noch ungelöst ist.

---

[1] "The Weyl group is the skeleton of a reductive group and conversely a reductive group is just the Weyl group with some flesh"

Ein bemerkenswerter Aspekt von Kazhdans und Lusztigs Konstruktion ist die Beobachtung, dass Weyl-Gruppen endliche Spiegelungsgruppen von recht spezieller Art sind. (Zum Beispiel sind die Symmetrien des Rechtecks, Dreiecks, Quaders und Sechsecks die einzigen zweidimensionalen Spiegelungsgruppen, die als Weyl-Gruppen auftauchen. In Dimension 3 erhält man die Symmetrien eines Tetraeders und Hexaeders, aber nicht die Symmetrien eines Ikosaeders.) Die Konstruktion von Kazhdan und Lusztig macht jedoch für eine beliebige Coxeter-Gruppe Sinn. Zudem scheinen die Polynome interessante und tiefgreifende Eigenschaften zu haben. Zum Beispiel vermuteten Kazhdan and Lusztig, dass die Koeffizienten ihrer Polynome immer positiv sind. (Diese Eigenschaft sieht auf den ersten Blick sehr unwahrscheinlich aus.) In dem Fall, dass die Coxeter-Gruppe die Weyl-Gruppe einer Lie-Gruppe ist, haben Kazhdan und Lusztig mächtige Werkzeuge der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts benutzt (z. B. Delignes Beweis der sogannten Weil-Vermutungen), um ihre Vermutung zu zeigen.

Verschiedene Forscher (unter anderem Belolipetsky, Rumynin und Williamson) arbeiteten am Max-Planck-Institut über Fragen zu Kazhdan-Lusztig-Polynomen. In Zusammenarbeit mit Elias hat Williamson (MPIM) ein Projekt vollendet, das versucht, die Positivitätsvermutung von Kazhdan und Lusztig in kompletter Allgemeinheit zu beweisen. Sie behaupten, einen Beweis gefunden zu haben, allerdings muss die Richtigkeit ihrer Argumentation noch von Spezialisten geprüft werden.

Der Beweisansatz von Elias und Williamson ist interessant. Im Fall einer Weyl-Gruppe haben Kazhdan und Lusztig ihre Polynome als subtile Invarianten (sogenannte „lokale Schnittkohomologie”) bestimmter Singularitäten interpretiert. Diese Interpretation ermöglichte einen Beweis ihrer Vermutung für Weyl-Gruppen. Dieser Beweis funktioniert allerdings nicht allgemein, weil es die entsprechenden Singularitäten nicht gibt. Aufbauend auf Arbeiten von Soergel, die teilweise in den Achtzigerjahren des vorigen Jahrhunderts am MPIM geschrieben wurden, konstruieren Elias und Williamson die „lokale Schnittkohomologie” von Singularitäten, die es eigentlich gar nicht geben kann.

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR MATHEMATIK, VIVATSGASSE 7, 53111 BONN, GERMANY

E-mail address: `geordie@mpim-bonn.mpg.de`