Übungen zu Algebra II
Bonn, WS 2012/13

Dr. Geordie Williamson
Hanno Becker

Blatt 1

Abgabe: Montag, 15. Oktober, vor der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei V ein Vektorraum über dem Körper k und $\mathfrak{gl}(V)$ der Vektorraum aller k-linearen Abbildungen von V in sich. Wir definieren eine Lie-Klammer auf $\mathfrak{gl}(V)$ durch

$$[x, y] := xy - yx \quad \text{für alle } x, y \in \mathfrak{gl}(V).$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{gl}(V)$ (versehen mit dieser Lie-Klammer) eine Lie-Algebra ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2

Sei A eine Algebra über dem Körper k. Eine *Derivation* auf A ist eine k-lineare Abbildung $D : A \to A$, sodass $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ für alle $a, b \in A$. Zeigen Sie, dass die Menge der Derivationen $\mathrm{Der}(A) \subseteq \mathfrak{gl}(A)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(A)$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 3

Sei S eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in einem Körper k. Definiere

$$\mathfrak{gl}_S := \{x \in \mathfrak{gl}_n \mid x^t S + Sx = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{gl}_S$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n$ ist. (1 Punkt)

(b) Sei J_n die $n \times n$-Matrix gegeben durch

$$J_n := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und sei S die $2n \times 2n$-Matrix gegeben durch

$$S := \begin{pmatrix} 0 & J_n \\ -J_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine konkrete Beschreibung der Elemente von $\mathfrak{gl}_S$ an und leiten Sie aus ihr eine Formel für die Dimension von $\mathfrak{gl}_S$ her. (3 Punkte)

Aufgabe 4

Seien k ein Körper, $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(k)$ und $x \in \mathfrak{gl}_n(k)$ eine Diagonalmatrix mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Beweisen Sie durch Angabe einer konkreten Basis aus Eigenvektoren, dass $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ diagonalisierbar ist, und zwar mit Eigenwerten $\lambda_i - \lambda_j$ für $1 \leq i, j \leq n$. (4 Punkte)